Прокл Диадох

КОММЕНТАРИЙ К ПЕРВОЙ КНИГЕ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА

Перевод А.И. Щетникова





Университет Дмитрия Пожарского
Москва
2013

ARISTEAS. Philologia classica et historia antiqua.
Supplementa. Volumen III.

УДК 821.14’02
ББК 83.3(0)3
Щ-70

Подготовлено к печати и издано по решению Ученого совета
Университета Дмитрия Пожарского, 2012 год

Прокл Диадох. Комментарий к первой книге «Начал» Евклида (перевод А.И. Щетникова). – М.: Русский Фонд Содействия Образованию и Науке, 2013. – 368 с. – (Приложение № III к журналу «Аристей. Вестник классической филологии и античной истории»).

Составленный Проклом комментарий к первой книге *Начал* Евклида впервые переведён на русский язык в полном объёме. Ранее Ю.А. Шичалин перевёл и издал в 1994 году *Введение* к этому комментарию, составляющее около 1/6 от объёма всего текста.

Трактат Прокла – это единственный дошедший до наших дней античный комментарий к Евклиду. От представляет первостепенный интерес как с точки зрения истории математики и её преподавания, так и с точки зрения истории философии. Прокл излагает в трактате свои взгляды на природу математики и математического мышления, обсуждает устройство математических текстов, даёт краткий очерк истории античной математики.

В трактате содержится обсуждение аксиом, постулатов и определений Евклида, а также даётся подробный комментарий ко всем 47 предложениям I книги *Начал*. Особый интерес представляет обсуждение Проклом проблематики, связанной с V постулатом Евклида. В частности, здесь обсуждаются античные попытки доказательства V постулата, и одно из таких доказательств принадлежит самому Проклу.

ISBN 978-5-91244-063-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРОКЛ И ЕГО КОММЕНТАРИЙ К ПЕРВОЙ КНИГЕ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА

Жизнь Прокла

Прокл родился в 412 г. в Константинополе. Родители Прокла были родом из Ликии в Малой Азии. Его детство прошло в небольшом ликийском городе Ксанфе. Юношей он отправился в Александрию, где изучал грамматику, риторику и право. Его учитель, софист Леонат, взял его собой в Константинополь; в этой поездке Прокл впервые обратился к философии. По возвращении в Александрию Прокл изучал философию у Олимпиодора и математику у Герона, выказав замечательные способности понимания и памяти. Когда его возраст приблизился к двадцати годам, уровень александрийской школы перестал его удовлетворять, и, он решил продолжить своё образование в Афинах.

Платоновскую Академию в это время возглавлял Плутарх Афинский, бывший тогда уже глубоким старцем. Сочинения Плутарха до наших дней не дошли, но в то время его слава была очень велика; его даже называли Плутархом Великим, чтобы отличить от Плухарха Херонейского, ныне гораздо более нам известного. Прибыв в Афины, Прокл сразу же направился к ученику Плутарха Сириану, который и представил талантливого новичка главе школы. Марин сообщает, что качестве введения в философию Плутарх читал с Проклом трактат Аристотеля *О душе* и диалог Платона *Федон*, побуждая Прокла делать записи об этих предметах. Под руководством Плутарха Прокл за последующие два года изучил всего Аристотеля – логику, этику, политику, физику, метафизику. Эти сочинения считались в Академии «малыми таинствами», после которых можно было приступать к «истинным таинствам» учения Платона – прежде всего, к *Тимею*.

Через два года Плутарх умер, и его преемником по Академии стал Сириан. При Сириане Прокл продолжал заниматься изучением Платона. Сириан также приобщил Прокла к изучению орфических сочинений и халдейских оракулов. Когда скончался Сириан, Прокл сам возглавил Академию. Вся дальнейшая жизнь Прокла – это жизнь академического философа, возглавлявшего самую знаменитую школу античной Греции с более чем восьмивековой традицией. Дни его были заполнены чтением учёных трудов, лекциями и беседами с учениками, составлением собственных сочинений. Об исключительной работоспособности Прокла Марин пишет так: «В беспримерном своем трудолюбии он устраивал в день по пяти разборов, а порой и больше, и писал не меньше, чем по семисот строк. Посещал он и других философов, ведя с ними по вечерам неписаные беседы, но и при этом не забывал ни на миг о ночных обрядах и бдениях, не забывал и преклониться перед солнцем на восходе, на полудне и на закате». Прокл руководил Академией до самой своей смерти, наступившей в 485 году.

Марин в похвальном слове говорит, что Прокл обладал отменным здоровьем, был красив лицом, силён и хорошо сложен. Из личных качеств Прокла он отмечает его исключительную благожелательность, общительность и доброту, справедливость, умеренность и мужество. Всецело посвятив себя философии и не заведя семьи, Прокл принимал участие в делах своих друзей и их близких. Он не был чужд общественных добродетелей, участвовал в городских собраниях, жертвовал немалые деньги на общественные нужды.

Как и все неоплатоники, Прокл был благочестивым последователем традиционных греческих культов, соединявшихся с чужеземными верованиями, прежде всего египетскими и халдейскими, также весьма почитаемыми. Он неукоснительно соблюдал всевозможные очищения, воздерживаясь от животной пищи, предаваясь молитвам, постясь, отмечая праздники, сочиняя гимны в честь богов – как отеческих, так и чужеземных. Прокл не только учил о божественном, но и участвовал в разных священнодействиях, занимался гаданием и магией. Марин сообщает о Прокле много чудесного. А сам Прокл, по свидетельству Марина, говорил, что «философ должен быть не только священнослужителем одного города, но иереем целого мира».

Время жизни Прокла – это закат древнегреческой цивилизации. Языческие культы ещё отправлялись в частном порядке, но христиане, ставшие активными участниками политической жизни, всё больше настаивали на их полном запрете. Как раз в это время из Парфенона была изъята знаменитая статуя Афины работы Фидия, что в окружении Прокла было воспринято как явное кощунство. В религиозной полемике Прокл отнюдь не был пассивной стороной – как сообщает Суда, он написал *Возражения против христиан* в 18 книгах. Одно время нападки на Прокла сделались настолько сильными, что ему пришлось уехать на целый год из Афин в Лидию.

Платоновская Академия при Прокле пережила свой последний расцвет. Марин рассказывает, что когда Прокл мальчиком прибыл в Афины, вечером того же дня он решил подняться на Акрополь. Сторож, уже собиравшийся запирать ворота, сказал ему так: «Кабы не ты, я запер бы ворота». При Прокле ворота античной философской учёности всё ещё оставались открытыми. Когда он умер, до конца платоновской Академии, закрытой указом Юстиниана в 529 г., оставалось менее полувека.

Сочинения Прокла и краткий обзор его философии

Основные философские сочинения Прокла посвящены рассмотрению высших начал всего сущего и утверждению платонизма в качестве богословского учения. В трактате *Начала теологии* Прокл излагает свой вариант учения о сверхчувственных началах. Этот трактат состоит из 211 параграфов, в каждом из которых сначала формулируется, а потом доказывается некоторое утверждение. *Платоновская теология* – это капитальное сочинение, в котором Прокл выстраивает учение о высших началах и богах, приводя при этом множество цитат из Платона, призванных подтвердить, что такая система имелась уже у самого Платона, и что все сочинения Платона представляют собой единый священный текст.

Из многочисленных комментариев Прокла на диалоги Платона до нас дошли пять: на *Тимея* (Марин пишет, что Прокл ценил его более всех других), *Парменида*, *Государство*, *Алкивиада I* и отчасти на *Кратила*. Сохранилась также часть комментария Прокла на *Эннеады*

Плотина. Все комментарии на Аристотеля утеряны, однако известно, что Прокл толковал *Категории*, *Об истолковании*, *Первую и Вторую аналитики*.

В латинском переводе Вильгельма из Мербеке сохранились три небольших философских трактата Прокла – *О десяти сомнениях касательно промысла*, *О промысле, судьбе и о том, что в нас*, *Об ипостасях зла*.

В основе философии Прокла лежит круг воззрений, отчасти общий для всего неоплатонизма, начиная с Плотина, Ямвлиха и Порфирия, отчасти развитый самим Проклом. Выше всего сущего находится первое начало, которое превосходит всякое понятие и определение. Такое первое начало нельзя назвать сущим, поэтому оно – сверхсущее; его нельзя назвать мыслимым, поэтому оно – сверхмыслимое; и к нему приложимы также все прочие апофатические определения. Далее, всё сущее рассматривается в трёх последовательных фазах своего существования: пребывающим в единстве, выступающим из него в силу своего различения с ним и возвращающимся к нему в силу своего с ним сходства. Непосредственно ниже первого начала находятся три ипостаси, о которых учил Плотин: единое, ум и душа. Единое, чтобы ему быть связанным с умом, само выводит из себя некоторую перечислимую и структурированную совокупность превышающих всякое бытие единичностей, о которых Прокл говорит также как о богах. Ум и душа в этой системе вновь членятся триадически. Пребывающий в себе ум есть изначальное бытие, выходящий из себя – мышление, возвращающийся к себе – вечная жизнь. Души делятся на божественные, даймонические и человеческие. Каждый член такой триады, в свою очередь, вновь претерпевает тройственное расщепление. При этом отдельные члены триад связываются с различными традиционными богами, так что в итоге Прокл обрисовывает иерархически сложную картину мира. Догматический характер изложения делает философские труды Прокла, особенно если сравнивать их с сочинениями Платона и Аристотеля, читаемыми только очень узким кругом специалистов. Однако при этом язык Прокла – очень чёткий, формулировки – продуманные и чеканные; и весь стиль его богословских сочинений производит впечатление основательности и самодостаточности.

Перейдём теперь к другим сочинениям Прокла, по которым мы можем в какой-то мере судить о том, каков был круг знаний, передававшихся в платоновской Академии в эпоху поздней античности. В небольшом трактате *Начала физики* в виде цепочки определений и теорем излагается физическая система Аристотеля. К астрономическим сочинениям относятся короткий трактат элементарного содержания под названием *Сфера*, краткий *Обзор астрономических предположений*, *Пересказ астрологического Четырёхкнижия Птолемея* и книга *О затмениях*, сохранившаяся только в латинском переводе. Из математических сочинений Прокла целиком сохранился *Комментарий к I книге Начал Евклида*. Проклом было составлено также отдельное сочинение о параллельных прямых. До наших дней оно не дошло, но его общие идеи могут быть установлены по соответствующим пассажам из комментария к Евклиду (191.23–193.7; 365.7–373.2).

Из религиозных и магических сочинений Прокла до нас дошли *Эклоги из халдейской философии* (извлечение из большого трактата в 10 кн.) и книга *О иератическом искусстве эллинов*. От Прокла сохранилось также семь гимнов к богам: к Гелиосу, к Афродите, к Музам, ко всем богам, к Ликийской Афродите, к Гекате и Янусу, к премудрой Афине. Эти гимны, написанные гомеровским гекзаметром, обращают на себя внимание орфическим содержанием, которое воплощается в обращённых к богам призывах дать нам избегнуть «чёрного зла рождений». Приведём здесь целиком прекрасный гимн Прокла, обращённый к Музам:

Свет воспеваем, подъемлющий смертных горé, воспеваем
Девять дщерей великого Зевса прекрасноголосых!
Души людей, кои жизнь, полонивши, ввергает в глубины,
Могут они избавлять от скорбей, землеродным присущих,
Силою чистого таинства ум пробуждающей книги
Учат нас, как поскорей пролететь чрез глубокую Лету,
След обретя, что к звезде соимённой ведёт – ведь когда-то
Там они сбились с пути и упали на берег рождений
В жажде безумной испробовать жребий вещественной жизни.

Ныне, богини, молю – уймите порыв мой тревожный!
Полными смысла рассказами мудрых меня опьяните!
Да не сбивает с пути меня род человеков безбожный,
С дивной, священной стези, сияющей, полной плодами!
Музы, молю – из толпы многогрешного рода людского
Вечно влеките к священному свету скиталицу душу!
Пусть тяжелит её мед ваших сот, укрепляющий разум,
Душу, чья слава в одном – в чарующем ум благоречье.

(Перевод О.В. Смыки)

Из известных нам сочинений Прокла не сохранились *Возражения против христиан* в 18 кн., комментарии к Гомеру и к *Трудам и дням* Гесиода, а также трактаты *О хрестоматии* в 2 кн., *О воспитании* в 2 кн., *О богах у Гомера*, *На богословие Орфея*, *Согласие Орфея, Пифагора и Платона с оракулами* в 10 кн., *О Великой Матери*.

Евклид и его «Начала»

Биографические данные о Евклиде крайне скудны. Прокл в своём комментарии (68.20) пишет, что Евклид был старше учеников Платона, но моложе Архимеда и Эратосфена. Евклид жил и работал в Александрии во времена Птолемея I, правившего Египтом с 306 по 283 г. до н. э.

Прокл рассказывает анекдотическую историю о том, как Птолемей спросил Евклида, нет ли в геометрии пути более краткого, чем изучение *Начал*, на что тот ответил: «В геометрии нет царского пути». Впрочем, эта же история рассказывается и о Менехме и Александре Македонском. Стобей передаёт ещё один анекдот о Евклиде. Приступив к изучению геометрии и разобрав первую теорему, один юноша спросил у Евклида: «А какая мне будет выгода от этой науки?» Евклид подозвал раба и сказал: «Дай ему три обола, раз он хочет извлекать выгоду из учёбы». Этот анекдот также является традиционным, поскольку он восходит к древнему пифагорейскому изречению «Шаг и фигура, а не шаг и три обола».

Основное сочинение Евклида носит название Στοιχεῖα – *Начала*. Эта книга по праву считается самым известным учебником всех времён и народов: в течение более чем двух тысячелетий она составляла основу стандартного школьного курса геометрии. Слава Евклида как автора *Начал* в античности была столь велика, что в книгах его зачастую называли не по имени, а по прозванию στοιχειωτής – «автор *Начал*».

В своём исходном значении слово στοιχεῖα означает «звуки речи». Платон говорит в *Тимее* о четырёх стихиях подлунного мира, представляя их в виде правильных многогранников. На латынь στοιχεῖα переводится как *elementa*; существует предположение, что это слово представляет собой ещё одно название алфавита, по буквам lmn. И как грамотность начинается со знания звуков и букв, так и знание геометрии начинается с некоторых элементарных фактов, и из которых, как из кирпичиков, слагаются любые теории, сколь бы сложны они ни были.

Книги с названием στοιχεῖα, в которых последовательно излагались основные факты геометрии, составлялись и до Евклида – Гиппократом из Хиоса, Леонтом, а также Февдием из Магнезии. Однако *Начала* Евклида вытеснили все эти сочинения из обихода. Создавая свой труд, Евклид включил в него многое из того, что было создано его предшественниками, обработав этот материал и сведя его воедино. Прокл говорит, что Евклид «собрал многое за Евдоксом, усовершенствовал многое за Теэтетом, а помимо этого привёл к неопровержимости те доказательства, которые раньше доказывалось менее строго» (68.7). В последующей традиции *Начала* Евклида представляют общую основу для доказательств геометрических теорем, содержащихся в трактатах Архимеда, Аполлония и других авторов; все доказанные в *Началах* предложения в этих сочинениях считаются общеизвестными.

Начала в их нынешнем виде состоят из пятнадцати книг, из которых Евклидом были составлены первые тринадцать.

Первая и некоторые другие книги *Начал* предваряются списком определений тех сущностей, которые вводятся здесь в рассмотрение. Первой книге предпослан также список геометрических постулатов и общих аксиом. Как правило, постулаты задают базовые построения

элементарной геометрии («требуется, чтобы через любые две точки можно было провести прямую»), а аксиомы – общие правила вывода при оперировании с величинами («если две величины равны третьей, они равны между собой»).

В I книге *Начал* изучаются свойства треугольников и параллелограммов, касающихся их равенства и неравенства; венчает эту книгу теорема Пифагора. Книга II, восходящая к пифагорейцам, посвящена так называемой «геометрической алгебре». В III и IV книгах излагается геометрия окружностей, а также вписанных и описанных многоугольников. В V книге вводится общая теория пропорций Евдокса Книдского, а в VI книге эта теория прилагается к изучению подобных фигур. VII–IX книги посвящены теории чисел; весь этот материал восходит к пифагорейцам, а автором VIII книги, возможно, был Архит Тарентский. Здесь рассматриваются теоремы о делимости, о пропорциях и геометрических прогрессиях, вводится метод для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел, доказывается бесконечность множества простых чисел, описывается метод построения совершенных чисел. В X книге *Начал*, самой объёмной и сложной, строится классификация иррациональностей; её авторство приписывается Теэтету Афинскому. XI книга содержит основы стереометрии. В XII книге с помощью метода исчерпывания доказываются теоремы об объёмах пирамиды и конуса; автором этой книги является Евдокс Книдский. Наконец, XIII книга посвящена методам построения пяти правильных многогранников; считается, что часть этих построений была разработана Теэтетом.

Впоследствии к этим тринадцати книгам были прибавлены ещё две. XIV книга, посвящённая сравнению икосаэдра и додекаэдра, принадлежит александрийцу Гипсиклу (ок. 200 г. до н. э.). XV книга, также содержащая ряд стереометрических теорем, создана во время жизни Исидора Милетского (начало VI в. н. э.).

Начала Евклида соответствуют общепринятому канону математического трактата и в значительной степени определяют его для последующих эпох. Здесь нет никаких предисловий, никаких примечаний и разъяснений – всё это остаётся за пределами книги, как не относящееся собственно к математике.

Систематическое изучение геометрии по книгам *Начал* требовало некоторого учебного комментария, устного или письменного. Такой комментарий мог касаться как общих целей геометрии и принципов её устройства, так и отдельных книг и предложений. Мы знаем, что комментарии к *Началам* в античности составляли такие авторы, как Герон, Порфирий, Папп, Прокл, Симпликий. Из этих комментариев до нас дошёл только комментарий Прокла к I книге; в арабском переводе сохранился также комментарий Паппа к X книге.

Начала Евклида не только комментировались, но и подвергались редактированию. Общую редакцию *Начал* выполнил в середине IV в. н. э. Теон Александрийский. Именно с этой версии Теона сделано большинство последующих переводов.

В поздней античности существовал латинский перевод *Начал*, если не всего текста, то по крайней мере некоторых книг, но он был впоследствии утрачен. На арабский язык *Начала* были переведены в VIII в. В последующие столетия было выполнено ещё два арабских перевода *Начал* и создано множество комментариев к ним. Первые средневековые латинские переводы *Начал* были сделаны с арабских версий Аделардом из Бата (XII в.), Герардо из Кремоны (XII в.) и Джованни Кампано (XIII в.). Перевод *Начал* на латынь непосредственно с греческого языка был выполнен Бартоломео Дзамберти в конце XV в. и опубликован в Венеции в 1505 г. Ещё один перевод *Начал* на латынь, опиравшийся на две поздние рукописи, был сделан Симоном Гринеусом в 1533 г. Впоследствии были обнаружены рукописи лучшего качества, нежели те, которыми пользовался Гринеус; в частности, Ватиканский кодекс 190 содержал текст *Начал*, не редактированный Теоном. На основе этих рукописей в 1888 г. было выполнено классическое издание Гейберга.

Из других сочинений Евклида сохранилась *Оптика*, в которой рассматривается прямолинейное распространение света и различные оптические эффекты, *Явления*, посвящённые астрономии и сферической геометрии, *Данные*, в которых исследуется общий вопрос о том, что требуется, чтобы задать ту или иную фигуру. Только в арабском переводе сохранилась книга *О делении фигур*. Дошедшая до нас под именем Евклида *Катоптрика*, в которой рассматриваются зеркаль-

ные отражения, представляет собой более позднюю компиляцию, составленную, по всей видимости, Теоном Александрийским. Большая часть предложений приписываемого Евклиду трактата *Деление канона*, посвящённого пифагорейской теории музыки, вероятнее всего была написана Архитом Тарентским. По кратким описаниям или упоминаниям известны *Коники*, *Поверхностные места*, *Начала гармоники, Поризмы* – книга об условиях, определяющих кривые, *Псевдария* – книга об ошибках в геометрических доказательствах.

Математические науки как часть свободного образования

Предание приписывает создание образовательной системы, включающей в себя изучение математических наук, самому Пифагору. Прокл во *Введении* пишет, что «Пифагор преобразовал любовь к геометрической мудрости в форму свободного образования, рассмотрев её начала сверху и исследуя теоремы отвлечённо от материи и умозрительно» (65.16). Как происходило становление этой образовательной традиции, мы не знаем. Но во всяком случае, к концу V в. до н. э. она была уже вполне сложившейся. Платон в своих диалогах выводит двух принадлежащих к ней учителей, Гиппия Элидского и Феодора Киренского, наставляющих своих учеников в четырёх математических науках: арифметике, геометрии, астрономии, гармонике (*Гиппий меньший* 366c, *Протагор* 318d, *Теэтет* 145ad).

О том, какую роль играли математические науки в античной системе общего образования, мы можем узнать из диалогов Платона. Согласно Платону, предназначение настоящего образования состоит в воспитании свободного гражданина греческого полиса. Такой человек совершает свои действия не по внешнему принуждению и не по собственной прихоти, – но из сознания их внутренней необходимости. И математика с непоколебимостью её начал и непреложностью доказательств даёт формирующейся душе ясный образец такой необходимости.

В представлении пифагорейцев и Платона математические науки сами по себе обладают определённым нравственным характером. Основу математики составляет знание единого во многом, и это единое становится образом и мерой для всего остального. Таковы прямая линия среди кривых линий, прямой угол среди тупых и острых углов,

квадрат среди прямоугольников. Каждая из этих фигур внутри своего рода характеризуется определённостью, тождественностью, равенством себе самой. Квадрат – один, а прямоугольников – неограниченное множество. Но точно также и в человеческой жизни добродетель одна, а уклонений от неё – много. Потому пифагорейцы и называли нравственного человека «квадратным». Ведь он руководствуется в своей жизни верным знанием единого блага среди безграничного моря желаний и страстей.

Платон неоднократно говорит о том, что изучение математических наук ведёт и направляет душу к созерцанию высшего бытия. Этого же взгляда на математику придерживались и многочисленные его последователи. Приведём здесь слова Никомаха Геразского из *Введения в арифметику*, в которых хорошо передано платоновское отнощение к математике: «Ведь ясно, что эти науки суть лестницы и мосты, которые переносят наши умы от воспринимаемого чувством и мнением к постижимому мыслью и знанием; и от знакомых и привычных нам с детства материальных и телесных вещей – к непривычным и чуждым нашим чувствам, однако их нематериальность и вечность родственны нашим душам и, что ещё важнее, заключённому в них разуму» (I 3.6).

В *Послезаконии* о роли математических наук в образовании свободного человека сказано так: «Есть только этот способ, только такое воспитание, только эти науки; и, будь они легки или трудны, их надо освоить» (992a). О пользе этих наук Платон пишет в *Государстве*: «Ты, видно, боишься, как бы не показалось, будто ты предписываешь бесполезные науки. Между тем вот что важно, хотя поверить этому и трудно: в этих науках очищается и вновь оживает некое орудие души каждого человека, которое другие занятия губят и делают слепым, а между тем сохранить его в целости более важно, нежели иметь тысячу глаз, ведь только с его помощью можно увидеть истину» (527d).

В платоновской Академии возник настоящий культ занятий математическими науками. Для некоторых последователей Платона математика стала особым полем самостоятельных исследований, на освоение которого они направили все свои силы; и в то же время общий обзор математических наук рассматривался в качестве наилучшей

философской пропедевтики. Об этом говорит и легендарная надпись «не войдёт сюда не знающий геометрии» над входом в Академию, и передаваемый Диогеном Лаэрцием (IV 10) рассказ о втором схолархе платоновской школы Ксенократе, который ответил человеку, не знавшему ни музыки, ни геометрии, ни астрономии, но желавшему стать его учеником: «Иди прочь, тебе нечем ухватиться за философию». И хотя в ту эпоху, когда жил Прокл, деятельные математические исследования высокого уровня остались по большей части в далёком прошлом, тем не менее школьные математические науки продолжали составлять одну из важнейших основ традиционной образовательной системы, ведущей своё начало от пифагорейцев и Платона.

«Введение» Прокла и жанр математического наставления

Вводная часть комментария Прокла выполнена в жанре «математического наставления», известном нам также по нескольким другим произведениям, предназначенным для чтения в философских школах. В таком наставлении полагалось осветить тему сочинения, объяснить его название, рассказать о пользе, происходящей от рассматриваемого в нём предмета, кратко коснуться его истории, разъяснить, что сделал автор в сравнении со своими предшественниками, представить последующий порядок изложения, а также сообщить, какие требования предъявляются к ученику, приступившему к изучению этого предмета. К этому жанру относятся *Введение в арифметику* Никомаха из Геразы, *Изложение математических предметов, полезных при чтении Платона*, принадлежащее Теону из Смирны, трактат Ямвлиха *Об общей математической науке* и его же *Комментарий к Никомаховой арифметике*, заключительные разделы *Определений* Герона и некоторые другие произведения.

Прокл много говорит во Введении о пользе математики. Математика – это начало пути для того, кто одержим философией. И она полезна для всех разделов философии: и для физической теории, и для политической философии, и для философии нравственной. А о пользе математики для других наук и искусств может быть сказано то, что все они нуждаются в счёте, измерении и взвешивании, равно

как и в образцах для отношения и меры. Прокл отводит возражения тех, кто принижает математику, утверждая, что опыт в нашей жизни важнее отвлечённой теории. Математика научает нас порядку, соразмерности и определённости, а ведь благодаря этим трём качествам образуется красота в телах и в душах. Ошибаются и те, кто превратно толкует Платона и отлучает математику от истинной философии: ведь хотя математика и уступает первой философии, но тем не менее она является знанием того, что вечно тождественно и неизменно.

Переходя к геометрии, Прокл обозначает место, которое она занимает в разделении математических наук. Первая классификация этих наук принадлежит пифагорейцам, выделявшим внутри математики две науки о количестве и две науки о величине. Количество само по себе рассматривает арифметика, а количество в отношении к другому – музыкальная теория; с неподвижной величиной имеет дело геометрия, а с величиной движущейся – сферика. Другая, более поздняя классификация принадлежит Гемину, разделявшему всю математику на теоретическую, в которую включены арифметика и геометрия, и на круг различных прикладных дисциплин.

Прокл даёт краткий очерк развития геометрии от Фалеса до ближайших предшественников Евклида. Этот очерк, известный также как «каталог геометров», по общепринятому мнению восходит к *Истории геометрии*, созданной в конце IV в. Евдемом Родосским, учеником Аристотеля. Несмотря на свою краткость, он представляет собой бесценное сокровище для историков античной математики; о многих математиках IV в. до н. э. мы знаем только из него. О Евклиде же Прокл сообщает то немногое, что он сумел узнать из более поздних по сравнению с Евдемом источников.

Вступительное слово Прокла содержит похвалу Евклиду как автору *Начал*, сумевшему написать лучшее сочинение по этому предмету. «Выбрать и расположить по порядку элементы каждой науки, из которых выводится всё остальное и на которые всё остальное разлагается, – это трудно… В этом деле не должно быть ничего лишнего, потому что оно препятствует обучению; необходимо соединять и связывать все предложения, что полезнее всего для знания; надо продумать полное совмещение ясности и краткости, ведь эти противо-

положности затемняют нашу мысль; следует удерживать теоремы в общих пределах, потому что всё, что дробит процесс обучения, затрудняет усвоение знания. И во всём этом заметно, что элементарное руководство Евклида превосходит все остальные: оно полезно, потому что подводит к теории изначальных фигур; его ясность и членение обеспечиваются переходом от простейшего к разнообразному и тем, что теория начинается с общих понятий; а общность доказательства достигается переходом к искомому через первичные и изначальные теоремы» (73.15–74.18).

Говоря о цели *Начал*, Прокл разделяет понятие цели для самого сочинения и для ученика. Сами *Начала* заканчиваются рассмотрением пяти правильных тел, и это рассмотрение является их целью-завершением. А для ученика цель состоит в глубоком уяснении начального курса, на основе которого он может продолжить совершенствование своего знания геометрии.

Философия математики у Прокла

Прокл целенаправленно вписывает свой комментарий в предшествующую философскую традицию. Он цитирует около полутора десятков диалогов Платона, и прежде всего – такие важные для неоплатонической школы диалоги, как *Государство*, *Тимей*, *Федон*, *Парменид*. Из сочинений Аристотеля Прокл неоднократно делает отсылки ко *Второй аналитике* и к *Метафизике*, а также к трактату *О душе*. Упоминает он и пифагорейцев – и как зачинателей учения о пределе и беспредельном как двух началах всего сущего, и как изобретателей математико-богословского символизма, и в связи с их конкретными математическими достижениями. Истолкованные таким образом *Начала* оказываются одним из связующих звеньев между древней философией и платонизмом позднеантичных школ.

Прокл начинает свой комментарий с изложения традиционного платоновского учения, согласно которому математические предметы занимают срединное положение между миром идей и миром чувственно воспринимаемых вещей. Когда геометр доказывает какую-нибудь теорему, он чертит перед собой на доске или на песке некую фигуру; пусть это будет параллелограмм. Это изображение – несо-

вершенно, и непосредственно о нём невозможно никакое научное знание; но геометр в своём умозрении видит за ним воображаемую идеальную фигуру, линии которой обладают абсолютной прямизной и не имеют толщины. Что касается доказательства, оно относится не к рисунку на доске, и даже не к отдельной воображаемой фигуре, но сразу ко всем фигурам, подводимым под условие теоремы. Геометр указывает на начерченный параллелограмм, мысля при этом «параллелограмм вообще», не имеющий определённых пропорций и размеров – ведь теорема о параллелограмме лишь тогда заслуживает имени теоремы, когда она справедлива для всего вида параллелограммов.

Но откуда берёт начало этот вид и все другие математические виды? Отвечая на этот вопрос, Прокл полемизирует с Аристотелем, считавшим, что математические предметы возникают путём отвлечения от ощущаемых предметов и собирания общего в едином определении. Согласно Аристотелю, мы сначала видим и рисуем разные чувственно воспринимаемые параллелограммы, а потом даём общее определение параллелограмма как такого четырёхугольника, противоположные стороны которого попарно равны и параллельны между собой. Напротив, согласно Платону, мы можем увидеть в несовершенной фигуре параллелограмм только потому, что наша душа уже обладает знанием о параллелограмме, и это знание представляет собой идеальное единство определения-логоса и образа-эйдоса. Так что «остаётся, чтобы душа порождала математические виды и из себя, и от ума, и чтобы она сама была полнотой видов, хотя и основанных на умных образцах, но саморождённых по выпавшему им жребию. А потому душа не есть дощечка для письма, свободная от записей; но она исписана от века, пишет себя и пишется умом. Ведь душа – это и ум, ибо она разворачивает себя по уму и является образом ума и его внешним отпечатком» (16.4–13).

Математическая деятельность, согласно Проклу, представляет собой особого рода движение внутри мира бестелесных логосов. Это движение идёт в двух направлениях: с одной стороны, оно начинается с внешнего припоминания и завершается постижением начал математического знания, с другой стороны, оно разворачивается от

этих начал к многообразию результатов. И в познании математика то переходит от заранее известного к искомому, то идёт от искомого к заранее известному. Как говорит Прокл, «познавательные способности этой науки в целом оказались двоякими, причём одни устремляют нас к единству и свёртывают множество, а другие членят простое на разнообразное, более общее – на более частное, и начальные логосы – на вторичные и на много шагов удалённые от начал. И вот, начиная сверху, математика достигает воспринимаемого чувствами, соприкасается с природой и доказывает многое совместно с учением о природе; и так же, начиная снизу, она сближается с умственным знанием и касается созерцания первых начал» (19.13–19).

Особый интерес представляет собой последовательно развиваемое Проклом учение о геометрической материи. Предмет геометрии не находится в ощущаемой материи – ведь там невозможно найти линию без ширины, точку без частей, поверхность без толщины, круг с равными радиусами. Но он не может находиться и вне материи, в чистых логосах: ведь геометрические фигуры множественны, делимы на части, они могут быть в сравнении друг с другом большими или меньшими. Где же он тогда находится?

Решая эту проблему, Прокл следует суждению Аристотеля о том, что помимо ощущаемой материи, существует также умопостигаемая материя, которую сам Прокл называет «материей воображения». И именно в этой материи воображения и находятся те геометрические образы, с которыми имеет дело геометр. «Воображение, будучи средоточием познаний, хотя и возбуждается самим собой и производит познаваемое, однако же, не будучи вне тела, переводит познаваемое из неделимой жизни в делимое, протяжённое и имеющее фигуру, и тем самым всё, что оно ни помыслит, является отпечатком и формой мысли» (52.20–26). Мысленный круг един, потому что он существует лишь в определении, а определение не отличает один круг от другого, поскольку все они – круги. А воображаемые круги могут быть многими, мы можем представлять себе, что такие круги являются концентрическими, или касаются друг друга, или располагаются друг по отношению к другу каким-либо иным образом. Мысленный круг в некотором смысле прост, непротяжён и лишён очертаний; а протяже-

нием, очертанием и делимостью характеризуется тот круг, с которым мы имеем дело в воображении.

Обсуждает Прокл и вопрос о бесконечной делимости геометрической материи, равно как и о невозможности существования актуальной бесконечности. Согласно Проклу, «беспредельному остаётся существовать лишь в воображении, поскольку беспредельное не мыслится воображением. Ведь мыслить – значит придавать мыслимому как форму, так и предел; и мышление устанавливает проход в воображаемом, проходит его и его объемлет. Так что беспредельное относится не к мышлению, но к неопределённому для мысли; и, будучи немыслимым, несоразмерным природе и непостижимым для мысли, оно и называется беспредельным» (285.6–13).

Прокл как комментатор «Начал»

Как уже было сказано выше, комментарии к *Началам* составлялись и до Прокла, и Прокл пишет о том, что рядом этих комментариев воспользовался (200.11–18). Прокл цитирует в своём комментарии Герона, Порфирия, Паппа, Карпа, Посидония, Гемина, Аполлония, Птолемея и многих других авторов. Он полемизирует с геометрическими концепциями стоиков, эпикурейцев и самого Аристотеля; а иногда он возражает и самому Евклиду.

Комментарий Прокла представляет собой энциклопедию общих идей и методов геометрии, начиная с самых её основ, в понимании которых нуждается всякий, кто только приступает к изучению этой науки, и заканчивая такими вопросами, которые могут быть усвоены лишь теми, кто весьма далеко продвинулся в изучении как математики, так и философии.

Крупнейшим открытием древнегреческих геометров была та выводная структура, которую они придали своим математическим наукам. Стремясь представить тело каждой науки как единое целое, они выделили для каждой науки небольшой круг исходных посылок, из которых может быть выведено всё многообразие её предмета. Всякая наука имеет дело с некоторыми объектами и их свойствами, и эти объекты и их определяющие свойства перечисляются в списке определений. Все обоснования общего характера, применяемые в

доказательствах, образуют список аксиом. Точно так же все базовые геометрические построения составляют список постулатов.

Комментируя определения *Начал*, Прокл входит местами в разные интересные подробности. Говоря о линиях и поверхностях, он приводит их общую классификацию, предложенную Геминoм (111.1–113.25, 117.22–120.12) – хотя сложные объекты из этой классификации, такие как смешанные линии и смешанные поверхности, в *Началах* не рассматриваются. Обсуждая понятие плоского угла, Прокл подробно рассматривает разные доводы в дискуссии о том, относится ли угол к категории соотнесённого, качества или количества, и приходит вслед за своим учителем Сирианом к выводу, что «угол – это не что-то одно, но сплетение одного с другим, так что в нём соединяются все эти сущности» (123.20–22).

Многие определения Прокл сопровождает комментарием метафизического и космологического характера. Он особо подчёркивает роль прямой линии среди прочих линий, прямого угла среди прямолинейных углов, равно как и роль круга среди всех фигур и квадрата среди четырёхугольников. Все эти фигуры, каждая в своём роде, относятся к виду единого и предела среди множественного и беспредельного, являя собой основу божественного миропорядка. Некоторые геометрические объекты Прокл рассматривает также в свете их богословской символики, следуя в этом древним пифагорейцам, из которых несколько раз упоминается Филолай.

Приступая к рассмотрению постулатов и аксиом, Прокл делает между ними следующее предварительное различение: «за аксиому берётся то, что напрямую очевидно для нашего знания и легко воспринимается мыслью без какого-либо обучения, тогда как в постулате требуется принять нечто общедоступное и несложное, не нуждающееся для своего принятия в трудном размышлении, ухищрениях или особой подготовке… Постулат предписывает придумать и обустроить некую материю, имеющую простые признаки и легко воспринимаемую; а аксиома говорит о некоем неотъемлемом свойстве, которое само по себе известно слушателям» (179.2–8, 181.5–9). Иначе говоря, постулат относится к построению, а аксиома – к знанию.

Этому различению Прокл посвящает специальное обсуждение. Пусть постулат – это утверждение о допустимости того или иного

простейшего построения. Тогда первые три постулата у Евклида безусловно соответствуют этому определению: ведь в них говорится о возможности простейших построений с помощью линейки и циркуля. Но как тогда быть с четвёртым постулатом о равенстве всех прямых углов и с пятым постулатом о параллельных прямых? Следуя в этом вопросе Гемину, Прокл считает, что эти постулаты по сути дела не являются таковыми, и они должны быть доказаны в качестве геометрических теорем. Четвёртый постулат он неким образом и в самом деле доказывает. Что касается пятого постулата, Прокл сообщает нам о том, что его уже пытался доказать Клавдий Птолемей, но эго доказательство в действительности является неверным (364.1–368.25). Так что Прокл даёт своё доказательство, опирающееся на утверждения о том, что расстояние между параллельными прямыми является неизменным, а расстояние между пересекающимися прямыми при удалении от точки пересечения становится сколь угодно большим (371.10–373.2). Как мы знаем сегодня, сами эти утверждения являются эквивалентными пятому постулату.

С той же проблемой мы сталкиваемся и при рассмотрении аксиом. Типичным примером аксиомы у Евклида является следующее утверждение: «если от равных величин отнять равные, то и остатки будут равны». Прокл при обсуждении аксиом склонен держаться того взгляда, что «постулаты присущи геометрической материи, тогда как аксиомы общи всем наукам, имеющим дело с количеством и величиной» (182.7–8). В самом деле, только что приведённая аксиома относится и к числам, рассматриваемым в арифметике, и к непрерывным величинам, с которыми имеет дело геометрия. Но если аксиомы у Евклида являются стандартными правилами вывода для всех математических наук, а не для одной лишь геометрии, то как же тогда быть с аксиомой «две прямые не охватывают пространства», содержащейся в ряде рукописей *Начал*? Прокл склонен считать, что это утверждение надо исключить из списка аксиом, и оно также подлежит доказательству (184.8–10).

Как мы знаем сегодня, попытка Прокла ограничить круг недоказуемых геометрических начал утверждениями о возможности простейших построений и правилами умозаключения для действий с

величинами оказалась утопической. Но при этом Прокл с полным на то правом может считаться одним из основателей особого раздела математических исследований, посвящённого основаниям математики. А попытка Прокла доказать пятый постулат была одной из первых в длинном ряду исследований по проблеме параллельных прямых, продолженном сначала учёными исламского Востока, а затем европейскими математиками, и приведшем в итоге к открытию Гауссом, Лобачевским и Больяи неевклидовой геометрии.

Приступая к последовательному рассмотрению предложений первой книги, Прокл первым делом указывает, что все предложения геометрии делятся на задачи, в которых что-то отыскивается и строится, и на теоремы, в которых познаются и доказываются свойства геометрических фигур (200.22–202.8). Прокл обсуждает принципиальное устройство любой задачи или теоремы, сначала перечисляя шесть частей, встречающихся в каждом отдельном предложении обязательно или факультативно (203.1–15), а затем рассматривая эти части на примере первого предложения (208.1–210.16). Далее следует обсуждение разных технических терминов геометрии, таких как лемма, случай, поризм, отвод, сведение (211.1– 213.11). В ещё одном месте своего комментария Прокл специально анализирует разные случаи обращения теорем и доказательства от противного (252.5–256.9). Прежде чем рассмотреть ряд теорем о геометрических местах, Прокл сперва обсуждает общее устройство таких теорем (394.11–396.9). Прокл несколько раз обсуждает различие между частными и общими теремами, и подчёркивает, что общие теоремы являются более верно схватывающими суть предмета, нежели частные (251.11–19, 390.12–392.8).

Рассматривая то или иное предложение *Начал*, Прокл обычно начинает с того, что выясняет точный смысл того, что дано, и того, что требуется доказать или построить, обращая особое внимание на точность языка. Он выясняет также, какое место занимает это предложение среди других предложений первой книги, и какие постулаты, аксиомы и уже доказанные теоремы используются в том доказательстве или построении, которое имеется у Евклида. Для некоторых предложений он специально рассматривает те возражения, которые могут быть выставлены против предложенных доказательств и по-

строений, и приводит отводы этих возражений. Если Евклид в доказательстве рассматривает только один из возможных случаев взаимного расположения линий, Прокл иногда рассматривает другие случаи сам, а иногда предлагает сделать это своим ученикам «для тренировки». Иногда он приводит альтернативное доказательство теоремы, данное одним из предыдущих авторов, не забывая при этом подчеркнуть особое изящество того доказательства, которое даёт сам Евклид (см. 280.9, 282.20, 335.15, где доказательства Евклида сравниваются с доказательствами Аполлония).

В разных местах комментария имеются намёки на то, что Прокл собирался комментировать и следующие книги *Начал* (см. 272.14, 398.18, 427.10). Однако существование таких комментариев не находит подтверждения в традиции. И сам Прокл, завершая комментарий к первой книге, высказывает некоторые сомнения в том, сумеет ли он продолжить этот труд; впрочем, уже то, что сделано, может послужить образцом для всех любителей науки: «Что касается нас, если мы сумеем так же пройти и через остальные книги, нам надо будет возблагодарить богов; но если нас отвлекут другие занятия, мы предложим любителям этой теории последовательно разобрать остальные книги таким же путём, излагая все сложности и разделяя найденное, поскольку имеющиеся сейчас комментарии полны неясностей и ничего не дают для изложения причин, диалектических различений и философской теории» (432.9–19).

«Начала» как осевое произведение античной математики

Греческой математике, равно как и всей греческой культуре в целом, была неведома идея прогресса, столь характерная для науки и культуры Нового времени. Цель математики не может заключаться в бесконечном познании всё новых и новых математических фактов – ведь бесконечность не имеет завершённости и совершенства. Так что совершенное познание должно, сделав круг, возвращаться к своим началам и быть познанием этих начал, о чём Прокл неоднократно пишет в своём комментарии. В этом смысле вершинной точкой древнегреческой математики было создание такой книги, как «Начала». Всё,

что происходило до этого, осмысляется как предварительный этап, когда начала ещё не познаны или не оформлены. Всё, что происходит после установления начал – это или специальные математические занятия, которые к началам уже не ведут, или обучение началам. Обучение требует продумывания самих начал вновь и вновь, с самого начала. Именно таким продумыванием и занимается Прокл в своём комментарии, и именно к такому продумыванию он приглашает своих учеников и нас, его современных читателей.

Текст и перевод

Первое печатное издание комментария Прокла на греческом языке осуществил Симон Гринеус в Базеле в 1533 г., в качестве приложения к изданию Евклида. Первый латинский перевод Франческо Бароцци был опубликован в Падуе в 1560 г. Это издание основывалось на пяти рукописях в дополнение к той, которой пользовался Гринеус.

Настоящий перевод выполнен по критическому изданию Готфрида Фридлейна (Лейпциг, 1873); по этому же изданию дана пагинация. Разделение текста на главы следует традиции, идущей от Бароцци.

При работе использовался также английский перевод Гленна Р. Морроу (Принстон, 1970). Перевод «Введения» сделан с учётом изданного ранее русского перевода Ю. А. Шичалина (1994).

Литература

Месяц С.В. Прокл. В кн.: Античная философия: Энциклопедический словарь. М., 2008. С. 628–643.

Начала Евклида. Пер. и комм. Д.Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И.Н. Веселовского и М.Я. Выгодского. В 3 т. М.: ГТТИ, 1948–50.

Прокл. Комментарий к первой книге Начал Евклида. Введение. Пер. и комм. Ю.А. Шичалина. М.: Греко-латинский кабинет Ю.А. Шичалина, 1994.

Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii. Ed. G. Friedlein. Leipzig: Teubner, 1873.

Proclus. Kommentar zum ersten Buch von Euklids Elementen. Übersetzt von L. Schönberger und M. Strack. Halle a. d. Saale, 1945.
Proclus de Lycie. Les commentaires sur le premier livre des Elements d'Euclide. Tr.P. Ver Eecke. Bruges, 1948.
Proclus. A commentary on the first book of Euclid's elements. Tr. by G. R. Morrow. Princeton Univ. Press, 1970.

А.И. Щетников

ПРОКЛ ДИАДОХ

КОММЕНТАРИЙ К ПЕРВОЙ КНИГЕ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА

ВВЕДЕНИЕ. Часть I

Глава 1. Промежуточное положение математических предметов

Математическое сущее не относится ни к первейшим родам сущего, ни к последним и – в отличие от простых – разделённым, но оно по необходимости занимает срединную область между не имеющими частей, простыми, несоставными и неделимыми предметами, и теми, которые состоят из частей, всячески сочетаясь и всевозможно разделяясь. Вечное тождество, постоянство и неопровержимость его понятий (λόγων) показывает его превосходство над внесёнными в материю видами (εἰδῶν); [1] но последовательность замыслов, протяжённость предмета и выводимость разного из разных начал делает

[1] Уже в первых строках комментария нам встретилась пара понятий «эйдос – логос», важнейших для философии неоплатоников и доставляющих большую трудность для перевода. «Логос» – это «слово», «понятие», «замысел», «разумная речь»; в логике «логос» – это описательная часть определения, а в математике – отношение двух величин (отсюда «аналогия» – пропорция как перенос логосов-отношений). Всюду ниже слово «логос» оставлено без перевода по причине его многозначности, за исключением логоса-отношения. Эйдос – это вид в смысле логического деления рода на виды, но также вид как зрительный образ и облик; чтобы удержать единство смысла, мы всюду переводим «эйдос» как вид.

его более скромным по сравнению с неделимой и самостоятельной природой.

Я думаю, что именно поэтому Платон разделял знания о бытии по их предметам на первые, средние и последние[2]. И неделимое он считал всецело умопостигаемым, [4] связанным с простым разделением умопостигаемых предметов и превосходящим все прочие познания своей нематериальностью, чистотой, однообразным постижением и прикосновением к сущему. А с делимыми, причастными низшей природе и всему ощущаемому, он связал мнение, имеющее дело со смутной истиной. Тогда как со средними, – а таковы математические виды, которые ниже неделимой природы, но выше делимой, – он соотносил размышление (διάνοια). Следуя за умом и высшим знанием, размышление при этом совершеннее, точнее и чище мнения. Ведь оно последовательно расчленяет неделимость ума, разворачивая свёрнутость умственного замысла, а затем собирает разделённое обратно, возводя его к уму.

И как различаются между собой знания, так различаются и познаваемые природы, причём умопостигаемое превосходит всё прочее своим единообразием, а ощущаемое во всём уступает первым сущностям. А математические предметы и предметы размышления в целом стоят по порядку на среднем месте. Уступая тем делимостью, они выше этих нематериальностью; и в сравнении с теми им недостаёт простоты, а эти они превосходят своей точностью. И они отражают мыслимые сущности яснее ощущаемого, представляя делимые образы (εἰκόνες) неделимого, [5] напоминающие своим многообразием об единообразии сущего. Одним словом, они стоят в преддверии первых видов, выявляя их единую, не имеющую частей и порождающую сущность; но при этом они не возвышаются над раз-

[2] Платон, *Государство* 511be, 533e–534c.

дельностью и сложностью логосов и основой образов, не превосходят разнообразие и последовательность мыслей души, и согласуются с простыми и полностью очищенными от материи знаниями. Так мы понимаем среднее положение математических родов и видов, связывающих между собой всецело неделимую сущность и делимые вещи, происходящие из материи.

Глава 2. Общие начала математического бытия: предел и беспредельное

Чтобы найти начала математического бытия в целом, мы рассмотрим начала, распространяющиеся на всё сущее и всё из себя порождающие: я говорю о пределе и беспредельном.[3] Ведь это – два первых начала после неописуемой и всецело непостижимой причинности единого, и они служат основой всего, в том числе и математической природы. Из них всецело и последовательно расходится всё прочее, выходя по мере следования и занимая места в нужном порядке, и одно становится первым, другое – средним, третье – последним. [6] Ведь роды умопостигаемого по присущей им простоте первыми причастны пределу и беспредельному. Своим единством, тождеством и постоянством существования они исходят из предела, а в разделении на множество, плодотворном изобилии, божественной инаковости и продвижении они пользуются беспредельным. Математические предметы порождены пределом и беспредельным, причём не только как первейшими, умопостигаемыми и сокровенными началами, но также и как следующими за ними во вторичном порядке, порождающими между собой промежуточное мироустройство сущего и его разнообразие. Поэтому

[3] О пределе и беспредельном как космогонических началах см. Прокл, *Начала теологии* 89.

отношения (λόγοι) расходятся беспредельно, будучи управляемы причиной предела[4].

Ведь число, начинаясь с единицы, всегда продолжает возрастать, хотя всегда остаётся ограниченным; и деление величин продолжается беспредельно, хотя делимые величины всегда ограничены, ибо части целого ограничены на деле. Если бы не было беспредельного, то все величины были бы соизмеримы и не было бы невыразимого и иррационального, которыми геометрия отличается от арифметики; числа не получали бы порождающую способность от единицы, и не могли бы содержать в себе все отношения, наличные в сущем, будь то кратные или сверхчастные[5]. Ведь всякое число образует отношение с единицей и с предшествующим ему [7] числом.

А если бы не было предела, то в математике не было бы ни соизмеримости и общности отношений, ни тождества видов и равенства, и ничего иного, относящегося к столбцу лучшего[6]. Без этого нет ни наук, ни постоянных и точных понятий. И в математике востребованы оба этих начала, поскольку они вместе порождают другие сущности. И последние виды, внесённые в материю и множащиеся по своей природе, очевидно всячески причастны обоим началам: беспредельному как основе этих видов, пределу же по их отношениям, фигу-

[4] Алгоритм разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства описан Никомахом Геразским во *Введении в арифметику* I.23–II.2, Теоном Смирнским в *Изложении математических вещей, полезных при чтении Платона* 107–111, и рядом других авторов.

[5] Кратное отношение – это отношение большего числа к меньшему, когда меньшее число укладывается в большем целое число раз. Сверхчастное отношение, выраженное в наименьших числах – это отношение большего числа к меньшему, когда эти числа разнятся на единицу.

[6] Речь идёт о пифагорейском парном разделении начал, описанном Аристотелем в *Метафизике* 986a22–26.

рам и формам. И ясно, что первые начала математики – те же самые, что и для всего сущего.

Глава 3. Общие математические теоремы

И подобно тому, как мы рассмотрели общие начала, имеющие силу для всех математических родов, так же перечислим общие и простые теоремы, порождённые одной наукой, содержащей все математические знания в одном, а также рассмотрим, как она согласуется с ними всеми и может усматриваться как в числах, так и в величинах и в движениях. А таково то, что связано с пропорциями, с их составлением и разделением, обращением и перестановкой; а также то, что связано со всеми отношениями – кратными, сверхчастными и сверхмногочастными, и обратными к ним; сюда относятся и просто равенство и неравенство, рассматриваемые в их целостности и всеобщности, когда речь идёт не о том, как они проявляются [8] в фигурах, числах или движениях, но о самой по себе природе каждого из них, общей и познаваемой простейшим образом. Общими для всех разделов математики будут также красота и порядок, равно как и путь от известных к искомым и обратный переход, называемые анализом и синтезом[7]. Подобие и неподобие отношений также не пропущены ни в одном из родов математики. Ведь одни фигуры мы называем подобными, а другие – неподобными, и числа тоже бывают подобными и неподобными[8]. И то, что касается степеней (δυνάμεις), очевидно тоже относит-

[7] Прокл использует здесь риторическую фигуру, называемую *хиазмом* (перекрещиванием): ведь восхождение от известного к искомому называется синтезом, а анализ восходит к первому и началам.

[8] Подобными называются плоские и телесные числа, стороны которых образуют одно и то же отношение между собой (кн. VII, опр. 22).

ся к общей математике, будь они мощными (δυναμένων) или владычествующими (δυναστευομένων). Сократ в *Государстве* вложил всё это в уста возвышенно глаголющих Муз, охватив все математические отношения в очерченных пределах и представив в названных числах, по которым отмеряются периоды плодовитости и противоположного ей бесплодия [9].

Глава 4. Как существует общее знание?

А потому нам не следует считать эти общие свойства ни обретшими бытие прежде многих разделённых видов, ни того, что они – позже их и возникают от многого; но надо полагать, что они находятся во многом, превосходя его простотой и точностью. Поэтому их познание предшествует многим знаниям и передаёт [9] им свои начала, так что эти многие основываются на них и к ним возвращаются. И когда геометр говорит, что четыре пропорциональные величины будут пропорциональны и перестановкой [10], он доказывает это из своих начал, которыми арифметик не пользуется; а когда арифметик говорит, что четыре пропорциональных числа будут пропорциональны и перестановкой [11], он доказывает это из начал своей науки. Но кто из них познаёт перестановку саму по себе – неважно, для величин или для чисел [12], – а также разделение

[9] δύναμις = возможность, способность, сила, мощь; а в математике это возведение числа во вторую степень и переход от стороны квадрата к его площади. Прокл обыгрывает здесь пассаж из *Государства* 546bc, в котором Платон в спекулятивной форме рассуждает о так называемом «брачном числе».

[10] Предложение V.16.

[11] Предложение VII.13.

[12] Перестановка отношений определяется в кн. V, опр. 12.

соединённых величин и чисел, и соединение разделённых [13]? Ведь хотя эти науки и знания относятся не к частному, у нас нет ещё одной науки о нематериальном, стоящем ближе к умозрению. Но наукой будет в первую очередь такое знание, и от неё многие науки приобретают общие рассуждения, и она восходит от самых частных знаний к самым общим, когда мы понимаемся к науке о том сущем, которое, собственно говоря, и есть [14]. Эта наука не считает нужным рассматривать ни сами по себе числа, ни общее для количеств, но она созерцает единую и неподвижную сущность и существование, и потому объемлет все науки, берущие в ней своё начало. Высшие всегда передают подчинённым первые посылки доказательств, а самая совершенная наука передаёт остальным свои начала: [10] одним – более общие, другим – более частные. Вот почему Сократ в *Тэтете*, сочетая шутку с правдой, уподобляет находящиеся в нас науки голубям. И он говорит, что одни из них летают стаями, а другие – отдельно от прочих [15]. Более общие и целостные науки содержат в себе множество частных, тогда как те, что разделены по видам, стоят порознь, не связанные между собой, поскольку исходят из различных первых начал. А потому над множеством наук и учений должна стоять одна наука, познающая общее и распространяющаяся на все роды, и сообщающая начала всем разделам математики. Пусть этим и ограничится наше наставление о ней.

[13] Соединение и разделение отношений определяются в кн. V, опр. 14–15.

[14] Аристотель, *Метафизика* 1026a31, 1064a3-b7.

[15] Платон, *Тэтет* 197d.

Глава 5. Критерий математических наук

Теперь мы рассмотрим, в чём состоит критерий математических наук. В этом мы будем следовать Платону как зачинателю этого учения. В *Государстве* он отделяет знаемое от знаний, и в соединении подчиняет знания знаемому [16]. Он разделяет умопостигаемые сущие от ощущаемых, и затем делит умопостигаемое на умопостигаемое (νοητά) и разумное (διανοητά), и ощущаемое – на ощущаемое (αἰσθητά) и уподобляемое (εἰκαστά). Знание умопостигаемого, первейшего из четырёх родов, он определил как мысль (νόησις), разумного – как размышление (διάνοια), ощущаемого – как веру (πίστις), уподобляемого – как уподобление (εἰκασία). И он показывает, что уподобление так же относится к ощущению, [11] как размышление к мысли: ведь и уподобление познает отражения ощущаемого, воображаемые картины в воде и других зеркалах, имеющие низший порядок и являющиеся по сути отражениями отражений; и размышление созерцает образы умопостигаемого, опустившиеся от первых, простых и неделимых видов ко множеству и разделению, а потому такое познание зависит от других главнейших предпосылок, тогда как мысль восходит к самому беспредпосылочному началу.

И если математические науки получили в удел не чуждую разделения и отъединения основу, всячески делимую и разнообразную, не постигаемую ощущением, всегда изменчивую и всецело делимую, всякому должно быть ясно, что по своей сути они разумны, и их критерием оказывается размышление, тогда как ощущение служит критерием для ощущаемого и отражение – для уподобляемого. Поэтому Сократ определяет это

[16] *Plat.* Resp. 511be, 533e–534c.

знание как более размытое в сравнении с первейшей наукой, но более отчётливое, нежели опирающиеся на мнения догадки [17]. Ведь по сравнению с мыслью оно имеет бóльшую развёрнутость и подробность теории, а неизменностью логосов и неопровержимостью оно превосходит мнение. И хотя его определения из предположений перешли к нему при ослаблении первой науки, но по утверждённости в нематериальном оно совершеннее ощущаемых видов. Таков критерий суждения во всей математике, и мы определили его согласно мысли Платона: [12] это размышление, которое выше мнения, но ниже мысли.

Глава 6. Порождение математических родов и видов

Теперь нам надлежит рассмотреть, как следует говорить о сущности математических видов и родов. Надо ли считать, что она происходит от ощущаемого – или через отвлечение [18], как обычно говорят, или через собирание частностей в одном общем логосе? Или надо допустить, что она имела основу и до них, как считает Платон и показывает продвижение целого?

Во-первых, если мы скажем, что математические виды (εἴδη) основаны на ощущаемом, поскольку душа на основе материальных треугольников и кругов образует в себе самой вид круга или треугольника, то откуда логосы получают точность и неопровержимость? По необходимости либо от ощущаемого, либо от души. Но от ощущаемого она возникнуть не может, поскольку ему следовало бы быть более точным. В таком случае – от души, которая придаёт совершенство несовершенному и точность неточному. Ведь где мы найдём среди ощущаемого то, что не имеет частей, или ширины, или глубины? Где – ра-

[17] Платон, *Государство* 533d.
[18] Аристотель, *Метафизика* 1061a29.

венство линий, идущих от центра? Где – всегда неизменные отношения сторон? Где – прямизну углов? Разве мы не видим, что все ощущаемые вещи смешаны между собой, и что в них нет ничего беспримесного и чистого от противоположного, но что все они делимы, протяжённы и подвижны? И как мы объясним неподвижные логосы из подвижного и неизменную сущность – из того, [13] что разнится само с собой? Ведь всё, что основано на подвижных сущностях, и само по общению с ними имеет изменчивое существование. И как мы придадим точным и неопровержимым видам неточность и нестрогость? Ведь всякая причина неподвижного знания будет ещё более неподвижной. Так что нам следует считать душу прародительницей математических видов и логосов. И если она содержит их образцы в самой своей сущности, и её порождения суть отображения уже имевшихся в ней видов, сказав это, мы согласимся с Платоном и, похоже, отыщем истинную суть математических предметов. Если же она, не имея заранее этих логосов, обустраивает такой нематериальный миропорядок и порождает такую теорию, то как она может судить, являются ли её порождения плодотворными или же никчёмными и неистинными призраками? И каким мерилом она будет измерять содержащуюся в них истину? Как она порождает такое разнообразие логосов, если не обладает их сущностью? Ведь тогда мы сделаем их порождение случайным и не связанным с определённым бытием. Если же математические виды суть порождения души, то тогда она имеет свои логосы не от ощущаемого, но напротив, производит его на их основе, и её потуги и роды порождают на свет неизменные и вечные виды.

Во-вторых, если мы составляем математические логосы на основе [14] воспринимаемого чувствами, то разве не будет необходимо назвать лучшими те доказательства, которые составляются из ощущаемого, а не на основе самых общих и простейших видов? Ведь причины доказательств всегда родствен-

ны тому искомому, за которым мы охотимся [19]. Если же частное является причиной общего, и ощущаемое – причиной разумного, как тогда мы ухитряемся при доказательстве приводить более общее определение вместо частного, и показывать, что сущность разумного более родственна доказательством, нежели ощущаемое [20]? Если кто-то доказывает, что равнобедренный треугольник имеет углы, равные двум прямым, и узнаёт то же самое для равностороннего и неравностороннего треугольника, он ещё не обладает общим знанием; но знанием самим по себе обладает тот, кто доказал это просто для всякого треугольника [21]. И опять, для доказательства общее лучше частного, и доказательство лучше идёт из общего; а то, из чего идёт доказательство, – первичнее и по природе предшествует частному, и является причиной доказываемого. А потому доказательные науки не должны смотреть на ощущаемое, которое возникло позднее и является более смутным, но должны рассматривать постижимое размышлением, ибо оно – более совершенное в сравнении с тем, о чём мы узнаём через ощущение и мнение.

В-третьих, мы утверждаем, что говорящие это принижают душу в сравнении с материей. Ведь говоря, что материя получает от природы сущностное, более сущее и более ясное, а душа [15] создаёт в себе вторичные образы и уподобления, менее значимые по сущности, поскольку она отделяет от материи но, что по природе неотделимо, разве они не объявляют душу более немощной и бедной, нежели материя? Ведь и материя служит местом для материализовавшихся логосов, и душа – местом для видов [22]. Но одна вмещает первичное, а дру-

[19] Аристотель, *Вторая аналитика* 71b20–32.
[20] Там же, 85b23.
[21] Там же, 73b28, 85b5.
[22] Аристотель, *О душе* 403a25, 429a27.

гая – вторичное; одна – существующее прежде, другая – на нём основанное; одна – сущностное, другая – возникшее из него по замыслу. И как та, что первично причастна умной сущности и полнится тамошним знанием и целостной жизнью, может быть преемницей более смутных низших видов и самого несовершенного вместилища сущего? Впрочем, излишне возражать против этого уже не раз разобранного мнения.

И если математические виды не отделены от воплощённых в материи и не являются соединением общего для отдельных предметов, и в целом не рождены позднее из ощущаемого, то необходимо, чтобы душа получала их или от себя самой, или от ума, или от себя и от ума. Но если только от себя, как они будут образами умных видов? И как они окажутся посреди неделимой природы, если ми не уделено неделимого восполнения от первых? Как те, что в уме, смогут быть первозданными образцами целого? А если только от ума, как смогут сохраниться неизменными самодействие и самодвижение души, [16] если определения входят в неё извне, движимые иным? И чем она будет отличаться от материи, существующей только как возможность и не порождающей овеществлённых видов? Остаётся, чтобы она порождала их и из себя, и от ума, и чтобы она сама была полнотой видов, хотя и основанных на умных образцах, но самороождённых по выпавшему им жребию.

А потому душа не есть дощечка для письма, свободная от записей; но она исписана от века, пишет себя и пишется умом. Ведь душа – это и ум, ибо она разворачивает себя по уму и является образом ума и его внешним отпечатком. И если ум всецело умён, то и душа всецело душевна; и если он служит образцом, то душа – образом; и если он – в сосредоточении, то душа – в разделении. И Платон составил душу из всех математических видов, разделив её по числу и сочетав пропорциями и гармоническими отношениями, поместил в ней первознанные начала фигур, прямую и окружность, и мысленно привёл в движение

её круги [23]. Все математические виды первично существуют в душе; и до чисел – самоподвижное, до видимых фигур – фигуры зодиака, до гармоничного – гармонические отношения, до движущихся по кругам тел – созданные прежде невидимые круги; [17] и полнота всего – это душа. И её миропорядок – иной, рождающий себя из себя и порождаемый собственным началом, полнящий себя жизнью и полнимый демиургом, нетелесно и непротяжённо, так что выводя наружу свои логосы, он тут же обнаруживает все науки и добродетели. Из этих видов и состоит душа, и не следует думать, что число в ней – это множество единиц, и не следует считать идею телесного протяжённой, но все образцы проявленных чисел, фигур, отношений и движений надо предполагать живыми и умными, следуя *Тимею*, полностью изложившему всё её рождение и создание из математических видов, и установившему причины всего, что в ней имеется. Ведь семь пределов охватывают начала всех чисел – линейных, плоских и телесных [24]; и семь отношений из всех предшествовали в ней в соответствии с её причиной [25]; и начала фигур были установлены в ней демиургом; и также – первое из движений, охватывающее все остальные и приводящее их в движение, поскольку круг и круговое движение есть начало всего движущегося. А потому математические логосы, наполняющие душу, являются сущностными и самоподвижными, и размышление, развивая их и разворачивая, устанавливает всё разнообразие математических наук, и душа никогда не остановится, всегда порождая [18] и отыскивая их одну за другой, раскрывая свои определения, не имеющие частей. Ведь она содержит их изначально, и собственной беспредельной способностью выводит из имеющихся начал всевозможные теоремы.

[23] Платон, *Тимей* 35a–36c.
[24] Там же, 35bc.
[25] Там же, 36ab.

Глава 7. Устройство общей математики

От сущности математических видов мы поднимемся к единой науке о них, предшествующей их множественности, и рассмотрим её дело, её возможности, и насколько она распространяет свою деятельность. Делом математики в целом, как сказано выше, служит разумное. Причём это – не мышление, неизменно пребывающее в себе, совершенное, самодовлеющее и обращённое к самому себе. Но это также не мнение и не ощущение: ведь эти знания опираются на внешнее, действуют в соответствии с ним и не обладают причинами познаваемого. И хотя математика начинается с внешнего припоминания, но завершается она внутренними логосами; и хотя она пробуждается позднейшим, она добирается до исходной сущности видов. Её деятельность, в отличие от мышления, не является неподвижной; однако, в отличие от ощущения, её движение не связано с переменой места или качества, но является жизненным, освобождающим и проходящим миропорядок бестелесных логосов, – то следуя от начал к результатам, то идя обратным путём, переходя в познании то от заранее известного к искомому, то от искомого к заранее известному. [19] А потому она не основывается во всяком поиске на собственной полноте, в отличие от ума, однако и не завершается другим, как ощущение, – но отыскивает искомое и от незавершённого восходит к завершённости.

Её возможности двояки, и одни ведут от начал к множеству и порождают многообразные пути теории, другие же возводят многие пути мысли к подходящим предположениям. Будучи подчинёнными началам единого и многого, предела и беспредельного, предметы её рассмотрения занимают среднее положение между неделимыми видами и всем делимым. Мне представляется естественным, что познавательные способности этой науки в целом оказались двоякими, причём одни

устремляют нас к единству и свёртывают множество, а другие членят простое на разнообразное, более общее – на более частное, и начальные логосы – на вторичные и на много шагов удалённые от начал. И вот, начиная сверху, математика достигает воспринимаемого чувствами, соприкасается с природой и доказывает многое совместно с учением о природе; и так же, начиная снизу, она сближается с умственным знанием и касается созерцания первых начал. Поэтому она произвела от себя механику в целом, оптику, катоптрику и многие другие теории, связанные с ощущаемым и действующие в нём; и на пути вверх [20] она воспринимает неделимые и нематериальные мысли, с их помощью совершенствует свои частные представления и знания, привносимые в эти разделы, а также уподобляет тем сущностям свои роды и виды и обнаруживает в соответствующих рассуждениях истину о богах и созерцание сущего. И об этом сказано достаточно.

Глава 8. Польза математики

А теперь мы посмотрим, что имеется в этой науке, от самых главных её знаний до самых последних. Тимей говорит, что математическое знание – это путь воспитания [26]. И поэтому она имеет такое же отношение к науке о целом и к первой философии, как воспитание к добродетели. Ведь как воспитание готовит и направляет душу к совершенной жизни, так и математика приуготовляет наш разум и око души к обращению от этого мира. Поэтому Сократ правильно сказал в *Государстве*: око души, ослепляемое и закрываемое прочими занятиями, одной лишь математикой воскрешается и пробуждается

[26] В *Тимее* таких слов нет, но эта мысль неоднократно высказывается Платоном в *Государстве*.

вновь к созерцанию бытия, и переходит от образов к истинному, и от мрака к свету ума, и в целом устремляется из пещеры, от держащих нас в ней с самого рождения оков и природных пут к бестелесной и неделимой сущности [27]. Ибо красота и порядок математических [21] рассуждений, неизменность и устойчивость её теории приобщают нас к умопостигаемому и совершенно утверждают в нём, всегда устойчивом, всегда сияющим божественной красотой и всегда хранящим взаимный порядок. А в *Федре* Сократ учит нас о троих, устремлённых вверх, в которых воплощён первый вид жизни: это одержимые философией, эросом и музыкой [28]. Для одержимого эросом путь восхождения начинается с видимой красоты и пролегает через промежуточные виды красоты; одержимый музыкой, третий по порядку, переходит от ощущаемых гармоний к неявным гармониям [29] и отношениям. И орган вспоминания для одного из них – зрение, для другого – слух. А тому, кто от природы одержим философией, откуда и с помощью чего начать движение к умному знанию и пробудиться к сущему и истине? Ведь его исходные начала – природная добродетель, зрение и нрав – несовершенны. И хотя он пробуждается сам по себе и стремится к сущему, будучи таким по природе, его нужно обратить к математике, как говорит Плотин [30], чтобы приучить к бестелесной природе и с её помощью, как с помощью фигур, возводить к диалектическим рассуждениям и в целом к созерцанию сущего.

И уже ясно, что математические науки вносят первейший вклад в философию. Но нужно ещё упомянуть о каждой из

[27] Платон, *Государство* 527e.
[28] Платон, *Федр* 249d.
[29] ἐπὶ τὰς ἀφανεῖς ἁρμονίας – ср. Гераклит 22DK 54.
[30] Плотин, *Эннеады*, I. 3. 3.

них, равно как и о том, что она направляет порывы ума к богословию. [22] Ведь именно в том, что не достигшим совершенства людям представляется неуловимым и неподъёмным в постижении истины о богах, математические логосы с помощью образов обнаруживают достоверность, ясность и неопровержимость. Они показывают сверхсущие особенности чисел и открывают разуму возможности умопостигаемых фигур. И поэтому Платон многие удивительные учения о богах излагает нам посредством математических видов, и философия пифагорейцев с их же помощью скрывает тайны божественных учений. Такова вся *Священная речь*[31], и Филолай[32] в *Вакханках*[33], и весь способ Пифагора учить о богах.

Очень важна также связь с физической теорией, поскольку она обнаруживает благоустройство отношений, составляющее вселенную, и связует пропорциями всё в космосе, как где-то говорит Тимей, и приводит враждующее – к дружбе и приветливости, и различное – к сочувствию, и являет простые и первозданные начала и всё, связанное с соизмеримостью и равенством, благодаря чему всё небо приобретает законченность, восприняв надлежащие фигуры в своих частях; и она отыскивает числа для каждого возникновения, обращения и возвращения, с помощью которых можно рассчитать [23] возникновение и гибель каждой вещи. И Тимей, показывая это, повсюду рассматривает природу целого посредством матема-

[31] ὁ ἱερὸς λόγος – приписываемое Пифагору сочинение, на которое ссылается Диоген Лаэрций (VIII 8), Ямвлих в *Жизнеописании Пифагора* (146–148), а также Сириан в комментариях на *Метафизику* Аристотеля (842а9, 902а24, 911b3, 931а5).

[32] Филолай Кротонский (около 500 г. до н. э.), один из деятелей пифагорейского союза, впервые обнародовавший в письменном виде пифагорейское учение.

[33] Ср. Филолай 44DK 17–18.

тических имён, и обуславливает рождение элементов числами и фигурами, и возводит к ним их свойства, их претерпевания и действия, – то есть к острым и тупым углам, к гладкости сторон и к противоположным свойствам, – и причину разнообразных изменений он усматривает в большом или малом числе элементов[34].

И разве мы не скажем о так называемой политической философии, что и здесь математика приносит великую и удивительную пользу, отмеряя надлежащие сроки для действия, разнообразные обращения и порождающие числа, в которых заключены причины сходства и несходства, рождения и совершенства и противоположные им, и каковые суть хореги согласованной и несогласованной жизни, в целом приносящие урожай или бесплодие. И речь Муз в *Государстве*[35] говорит о том, что всеобщее геометрическое число поставлено владыкой над лучшими и худшими рождениями, над нерушимой неуклонностью блáгого нрава и над переходом наилучших форм государственного устройства к безрассудным и подверженным страстям. И совершенно очевидно, что передавать науку о так называемом геометрическом числе – это задача математики в целом, а не только [24] арифметики или геометрии, поскольку отношения плодородия и бесплодия относятся ко всем разделам математики.

Далее, математика приготовляет нас к нравственной философии, сообщая нашим нравам порядок и основательность, и придаёт добродетели подобающие ей фигуры, лады и движения, благодаря которым, по мнению афинского гостя, достигают совершенства те, кто с юности приобщён к нравственной

[34] Платон, *Тимей* 53.
[35] Платон, *Государство* 545e–547a.

добродетели [36]. Она указывает отношения для добродетелей – то в числах, то в фигурах, то в музыкальных созвучиях, – и вскрывает излишества и недостатки, присущие порокам, благодаря чему мы приобретаем умеренность и упорядоченность нрава. А потому и Сократ в *Горгии*, обвиняя Калликла за его беспорядочную и разнузданную жизнь, говорит: «Ты пренебрегаешь геометрией и присущим ей равенством» [37]. А в *Государстве* он находит, насколько удовольствие тирана отстоит от удовольствия царя, исходя из порождения плоского и объёмного числа [38].

А сколь велика польза, приносимая математикой всем остальным наукам и искусствам, мы поймём, поразмыслив над тем, что теоретическим искусствам, каковы риторика и другие искусства, обретающие свою силу в слове [39], она придаёт совершенство, порядок, и – в подражание себе самой – полноту целого, состоящую в наличии первого, среднего и последнего; творческим искусствам она даёт образец, [25] обнаруживая в себе отношения и меры для созидаемого ими; а для искусств практических она определяет их деятельность и движение посредством своих устойчивых и неподвижных видов. И в целом все искусства, как говорит Сократ в *Филебе*, нуждаются в счёте, измерении и взвешивании, будь то вместе или порознь [40]. А все они либо содержатся в математических отношениях, либо определяются ими. Ведь порядок счёта, разнообразие мер и различие весов познаются математикой.

[36] Платон, *Законы* 672–673.
[37] Платон, *Горгий* 508a.
[38] Платон, *Государство* 587d.
[39] Платон, *Горгий* 451a.
[40] Платон, *Филеб* 55e.

Глава 9. Ответ всем тем, кто принижает математику

И хотя польза математической науки для самой философии и для всех остальных наук и искусств в целом уже понятна слушателям, однако некие спорщики пытаются отвергнуть ценность этой науки: одни – отказывая ей в красоте и благе, поскольку о них она не составляет речей[41], другие – показывая, что опытность в ощущаемом полезнее её общих теоретических положений: так геодезия полезнее геометрии, арифметика большинства полезнее установления теорем, и морская астрономия полезнее общей теории. Ведь мы богаты [26] не знанием богатства, а его наличием, и счастливы не знанием счастья, а счастливой жизнью. Так что мы согласимся, что для человеческой жизни и для практики полезно не знание математики, а опытность. Ведь несведущие в речах, но упражнявшиеся в каждом отдельном деле в отношении человеческих нужд всецело превосходят тех, кто занят только теорией.

Говорящим так мы можем возразить, доказывая красоту математики из того, на что опирался и Аристотель в своём стремлении вразумить нас [42]. Ведь красота в телах и душах образуется благодаря трём качествам: порядку, соразмерности и определённости, ибо телесное уродство происходит от материального беспорядка, бесформенности, несоразмерности и неопределённости, одержавших верх в составной природе, а душевное – от неразумия, пребывающего в нестройном и беспорядочном движении, негармонизуемого отношениями и потому не знающего границ; и красота присутствует в противоположном этому, то есть в имеющем порядок, соразмерность и определённость. А это мы усматриваем более всего в матема-

[41] Аристотель, *Метафизика* 996a29.
[42] Там же, 1078a33.

тической науке: порядок проявляется в объяснении вторичного и разнообразного на основе первичного и более простого, ведь следствия всегда зависят от предыдущего, и об одном [27] говорят как о начале, а о другом – как о выводимом из первых предпосылок; соразмерность – в согласии доказываемого между собой и в том, что всё возводится к уму, ведь общая мера этой науки в целом есть ум, от которого она берёт свои начала и к которому обращает учеников; а определённость – в устойчивых и всегда неподвижных определениях, ведь познаваемое ею не меняется от случая к случаю, как мнимое и ощущаемое, но всегда остаётся тем же самым и определяется умными видами. И если красота осуществляется благодаря этим качествам, а математические науки характеризуются ими, ясно, что в них есть красота. И как ей там не быть, если ум освещает эту науку свыше, а она спешит увести нас от ощущаемого к уму?

И мы не станем судить о её пользе на основе человеческих нужд и необходимости: ведь тогда нам придётся заключить, что созерцательная добродетель бесполезна, потому что она отрешается от человеческих забот и предпочитает вообще не знать того, на что они направлены. И Сократ в *Тэтете* отделяет корифеев от всякого соприкосновения с человеческой жизнью и устремляет их свободный от всякой необходимости и нужды разум к обзорной вершине бытия [43]. Поэтому и математическая наука [28] с её созерцанием важна сама по себе, а не ради человеческих нужд. А если пользу от неё нужно соотносить с чем-то другим, то надо уяснить её полезность для умного знания: ведь она выводит нас к нему и направляет, очищая око души и удаляя ощущаемые преграды для познания целого. И подобно тому, как целостную очистительную добродетель мы называем полезной или бесполезной не для житейских нужд,

[43] Платон, *Тэтет* 173c–175a.

но для созерцательной жизни, так и цель математики надо возводить к уму и всеобщей мудрости. Поэтому математика заслуживает ревностных занятий как сама по себе, так и ради умной жизни. И то, что её изучают ради её самой, как где-то говорит Аристотель, ясно из прироста математических теорий в малое время при отсутствии какой-либо мзды за поиски[44], а также из всяческой приверженности и желания заниматься ей, оставив всё остальное, у всех тех, кто хотя бы немного постиг её полезность, откуда ясно, что презирающим математическое знание не случилось отведать заключённых в нём радостей.

И математикой нельзя пренебрегать лишь потому, что она не служит нашим человеческим нуждам, – при том, что некоторые её крайние разделы приложимы к материи; напротив, надо удивляться её нематериальности и [29] тому благу, которое содержится в ней самой. Ведь люди вообще обратились к математическим изысканиям лишь после того, как перестали заботиться о необходимом. И это естественно: люди сперва заботятся о том, что соприродно становлению, и лишь затем – о том, что отрешает душу от становления и напоминает о сущем. А потому и к необходимому мы подступаем раньше самоценного, и к родственному ощущениям – раньше, чем к познаваемому умом. Ведь всё становление и связанная с ним жизнь души по природе переходят от несовершенного к совершенному. Таков наш ответ тем, кто принижает математическую науку.

Глава 10. В самом ли деле Платон отвергает математику?

Равно и некоторые, сидящие у одного с нами очага, подтверждая свои слова свидетельством Платона, могут попы-

[44] Аристотель, *Протрептик*.

таться привить высокомерное отношение к математике тем, кто знаком с ней лишь поверхностно. Ведь сам философ в *Государстве* изгнал математическое знание из хоровода наук и обвинил его в незнании собственных начал; и они приводят слова «она не знает, что у неё служит началом, и не знает, из чего у неё заключение и середина»[45], и другие упрёки, которые Сократ выдвинул против этой теории. Но, обращая эти слова к друзьям, мы напоминаем им, что сам Платон бесспорно показывает, как математика служит очищению [30] души и прогоняет тьму от умного света разума, сохранить который лучше, чем иметь тысячу телесных глаз[46], если следовать Афине у Гомера[47]; и что она причастна дарам не только Афины, но и Гермеса[48]; и он повсюду называет её наукой (ἐπιστήμη) и причиной величайшего счастья для тех, кто её изучает.

Но в каком смысле в этом отрывке из *Государства* он отрицает за ней имя науки? Поясню это кратко: ведь я обращаюсь к людям сведущим. Платон неоднократно называет наукой всякое знание общего, подразделяя его в соответствии с познающим чувством, причём он делает это и для путей познания, связанных с искусством или ремеслом. И я думаю, что в *Политике* и в *Софисте* он употребляет имя «наука» именно в этом смысле[49], называя наукой благородную софистику, которую

[45] Платон, *Государство* 533bd.

[46] Там же, 527e.

[47] Гомер, *Одиссея* XIII, 189–352: Афина рассеивает мглу и прогоняет туман, чтобы Одиссей лучше увидел свою родную Итаку.

[48] Дело Афины – война и мудрость, дело Гермеса – торговля и путешествия. Гермес – покровитель утренних и вечерних сумерек, а вместе с ними и плутовства; он – изобретатель алфавита и цифр, мер и весов, астрономии и музыки.

[49] Платон, *Софист* 231b.

Сократ в *Горгии* объявил ремеслом и угодничеством [50], а также многие другие занятия, которые по сути являются ремёслами, а не истинными науками. И, разделив это общее знание на познающее причины и знающее без причин, он одно из них возвысил именем науки, а другое назвал ремеслом. И поэтому он иногда называет искусства именем науки, [31] но ремесло –никогда. «Разве дело без объяснения (ἄλογον πρᾶγμά) может быть наукой?» – говорит он в *Пире* [51]. А потому наукой будет всякое знание, обладающее объяснением (λόγον) и причиной познаваемого. И эту науку, обладающую знанием предмета из причин, он делит надвое ещё раз, и одна половина будет основанной на догадках и частной, а другая – знанием того, что всегда тождественно и неизменно. Согласно этому разделению он отделяет от науки всё врачебное дело и всякие занятия, связанные с материей, – но математику и всякое созерцание вечного он называет наукой. И эту науку, уже отделённую от искусства, он разделяет снова, утверждая, что одна из частей не нуждается в предпосылках, а другая приводится в движение предпосылками. И та, которая не нуждается в предпосылках, обладает знанием целого, вплоть до блага, и восходит к высочайшей причине всего, делая благо целью этого восхождения; та же, которая имеет перед собой определённые начала, показывает следствия из них, продвигаясь не к началу, но к завершению [52]. И поэтому он говорит, что математика, пользуясь предположениями, не является беспредпосылочной и совершенной наукой. Ведь есть одна подлинная наука – та, посредством которой мы естественно познаём всё сущее, [32] и от неё берут начала как ближайшие к ней науки, так и более удалённые.

[50] Платон, *Горгий* 464c.
[51] Платон, *Пир* 202a.
[52] Платон, *Государство* 511bc.

А потому мы не говорим, что Платон отлучает математику от наук, – но он показывает, что она стоит на втором месте после единственной высшей науки; и он говорит не то, что она не знает своих собственных начал, но что она, взяв их у той науки без доказательства, доказывает из них всё последующее. Ведь и для души он то признаёт, что она основана на математических логосах и является началом движения, то говорит, что она получает движение от умопостигаемых родов. И одно согласуется с другим. Ведь для того, что движимо другим, она является причиной движения; но она не является началом движения вообще. Так же и математика является второй после первейшей науки, и по сравнению с ней она несовершенна; и всё же она – наука, не беспредпосылочная, но всё же знающая находящиеся в душе логосы, предоставляющая причины для умозаключений и имеющая логичное основание для того, что она знает. Вот что я могу сказать о взглядах Платона на математику.

Глава 11. Требования, предъявляемые к математику

А теперь мы скажем, какие требования предъявляются к математику и как мы можем правильно о нём судить. Ведь если просто образованный человек может судить обо всём, как говорит Аристотель [53], то человек, образованный в математике, может судить о правильности её рассуждений. Поэтому он должен обладать некоторыми правилами суждения, и первым делом должен знать, [33] о чём производятся общие доказательства и когда надо принимать во внимание отдельные особенности каждого вида. Ведь многое присуще различным видам, к примеру – что у всех треугольников углы равны двум прямым. Но многое, относясь к одной категории, различается

[53] Аристотель, *Никомахова этика* 1094b28.

по видам внутри общего, к примеру – подобие в фигурах и в числах. Здесь не следует требовать от математика единого доказательства: ведь начала фигур и чисел не одни и те же, но различные по основному роду. Но если привходящее свойство одно, то и доказательство будет одним: так во всех треугольниках углы равны двум прямым, и основа этого одна во всех видах, а именно – треугольник и его логос. А иметь внешние углы, равные четырём прямым, привходяще не только для треугольников, но и для всех прочих прямолинейных фигур, и доказательство подходит для всякой фигуры, если только она прямолинейна[54]. И всякий логос содержит некую особенность и свойство, которому причастно всё, попадающее под него, будь то логос треугольника, прямолинейной фигуры или фигуры в целом.

Во-вторых, ему следует знать, производятся ли его доказательства для подходящей материи, и не получается ли так, что он производит не необходимые и неопровержимые доводы, но правдоподобные и убедительные суждения. Ведь одинаково неправильно, как говорит Аристотель, требовать доказательств от ритора [34] и довольствоваться правдоподобными суждениями в математике[55]. Ибо всякий знаток и мастер в своём деле должен уметь рассуждать о своём предмете[56]. И Платон в *Тимее* требует, чтобы исследователь природы имел правдоподобные суждения о своих предметах[57]; а от того, кто учит об умопостигаемом и об устойчивой сущности, он требует других суждений – неопровержимых и неподвижных. Ведь предметы наук и искусств прямо производят различия между ними: одно – не-

[54] Аристотель, *Вторая аналитика* 85b38, 99a19.
[55] Аристотель, *Никомахова этика* 1094b25.
[56] Аристотель, *Метафизика* 981b6.
[57] Платон, *Тимей* 29bc.

подвижно, другое – движется, одно – проще, другое – сложнее, одно – умопостигаемое, другое – ощущаемое. И мы не требуем от всей математики одинаковой точности: одно в ней соприкасается с ощущаемым, а в другом предметом знания является мыслимое, и они не могут быть одинаково точными, но одна наука точнее другой. И мы говорим, что арифметика точнее гармоники; и в целом мы не станем настаивать, чтобы математика и другие науки пользовались одними и теми же доказательствами: ведь их предметы заметно различаются между собой.

В-третьих, мы говорим, что тому, кто хочет правильно судить о математических рассуждениях, надо рассмотреть тождество и различие, сущностное и привходящее, пропорциональное и всё такое прочее. Ведь почти все ошибки возникают у тех, кто в математических доказательствах в каждом виде принимает тождественное за иное или иное за тождественное, [35] и привходящее за сущностное или сущностное за привходящее, к примеру – считая, что окружность красивее прямой, или равносторонний треугольник – равнобедренного. Но не дело математики судить об этом[58].

В-четвёртых, поскольку математика по порядку стоит посредине между умопостигаемым и ощущаемым, и поскольку она обнаруживает в себе как многие образы божественного, так и многое из учений о природе, в её теории надо различать три вида доказательств: более умственные, более пространные, и соприкасающиеся с мнением. Доказательства должны различаться по задачам и разделяться по родам сущего, ибо она сама проявляется во всех родах и со всеми согласует свои рассуждения. Но об этом достаточно.

[58] Аристотель, *Вторая аналитика* 75b18.

Глава 12. Пифагорейское разделение математических наук

Теперь нам надо произвести различение видов математики, каковы они и сколько их по числу. После рассмотрения её целостного и всеобщего рода надо произвести сопоставление видовых различий входящих в неё более частных наук. Пифагорейцы считают, что математическая наука в целом делится на четыре части: сначала на количество (ποσόν) и величину (πηλίκος), а потом – ещё раз пополам: количество рассматривается само по себе и по отношению к другому, а величина – в покое или в движении. И арифметика рассматривает количество [36] само по себе, музыка – в отношении к другому, геометрия – величину неподвижную, а сферика – величину самодвижущуюся. И они рассматривают величину и количество не как простую величину (μέγεθος) или множество (πλῆθος), но как нечто определённое, ведь эти науки отказались от беспредельного, потому что никакую из беспредельностей нельзя познать. Когда это говорят мужи, достигшие полноты мудрости, мы не станем представлять себе количество в ощущаемом и величину в телесном. Рассматривать это – дело науки о природе, а не математики как таковой. Но когда демиург для полноты души берёт единство и различие целого, и тождество вместе с различием, а вместе с ними – покой и движение, и утверждает душу с помощью этих родов, как учит нас Тимей,[59] надо сказать, что разум, сообразуясь с её различием, а также с раздельностью и множеством её определений, будучи неподвижным и мысля себя как единое и многое, производит числа и их знание, то есть арифметику; а сообразуясь с единством

[59] Платон, *Тимей* 35a.

множества, общностью с собой и связанностью, он производит музыку. Потому арифметика и старше музыки, что душа в ходе творения сперва разделяется, [37] а потом уже связывается отношениями, как говорит Платон[60]. И опять, утверждая свою деятельность в соответствии с собственным покоем, она выявляет из себя геометрию, одну сущностную фигуру и созидательные начала всех фигур; а в соответствии с движением – сферику. Ведь она сама движется по кругам, всегда оставаясь неподвижной сообразно с причинами кругов, то есть с прямой и окружностью. И опять геометрия предшествует сферике, как покой – движению. Но поскольку душа породила эти науки, взирая не на свою бесконечную способность развёртывания видов, а на охват родового предела, постольку они говорят, что, лишив множество и величину беспредельного, они заняты тем, что уже определено. Ведь начала всего утвердил в ней ум, в том числе – начала множества и величины. А поскольку она в целом подобочастна себе самой, едина и неделима, будучи при этом разделённой и явив прекрасный порядок (κόσμος) видов, она причастна пределу и беспредельному – сущностным от умопостигаемых. И она мыслит себя сообразно с пределом, а порождает живые существа и всевозможные отношения сообразно с беспредельным. И её мысли привели к появлению этих наук из-за наличия в них предела, а не из-за беспредельности жизни. Ведь они несут образ ума, а не жизни. [38] Таково учение пифагорейцев и их разделение четырёх наук.

[60] Там же, 37а.

Глава 13. Разделение математических наук по Гемину

Но некоторые, такие как Гемин [61], считают, что математику следует делить иначе, и один её раздел они относят к умопостигаемому, а другой – к соприкасающемуся с ощущаемым; а умопостигаемым они называют то, что душа оживляет своим движением, отделяя себя от материальных видов. В умопостигаемом они устанавливают две первейшие и главнейшие части: арифметику и геометрию; а в том, чья деятельность направлена на ощущаемое, – шесть: механику, астрономию, оптику, геодезию, канонику [62], логистику [63]. Однако они не называют тактику частью математики, как некоторые: просто, по их мнению, она использует то вычисления – например, при подсчёте отрядов, то геодезию – например, при делении и разметке площадок. Точно так же и даже в большей степени не являются частью математики история и медицина. Но исторические писатели часто используют математические теоремы, говоря о положении климатических поясов, или высчитывая величину и диаметры городов, или их охваты, или периметры. И врачи многое разъясняют такими же путями. Ведь и Гиппократ, и все, писавшие о временах года [39] и местностях [64], ясно обнаруживают пользу астрономии для медицины. И тактик будет пользоваться теоремами математиков, однако он – не математик, даже если он, желая, чтобы лагерь был наименьшей величины, придаст ему форму круга,

[61] Гемин Родосский (I в. до н. э.) – астроном и математик, ученик Посидония. Гемину принадлежит один из первых комментариев к *Началам*, до нас не дошедший. Сохранилась его астрономическая работа *Введение в явления*.

[62] Теория настройки музыкальных инструментов.

[63] Практическое искусство счёта и вычислений.

[64] Гиппократ Косский, *О воздухе, воде и местностях*.

или же, чтобы сделать его бóльшим, сделает его квадратным, или пятиугольным, или иным многоугольным.

Таковы виды математики в целом. А геометрия ещё раз разделяется на планиметрию и стереометрию. И она не имеет дело отдельно с точками и линиями, поскольку ни одна фигура не возникла бы из них без плоскостей и объемных тел. И делом геометрии – и плоской, и телесной – всегда является составление, сравнение или разделение составленного. А арифметика делится на теорию линейных, плоских и объемных чисел. И она исследует виды числа как таковые, начиная с единицы, а также получение плоских чисел – как подобных, так и неподобных – и переход к третьему протяжению[65].

С ними сходны геодезия и логистика, рассуждающие не об умопостигаемых числах или фигурах, а о чувственно воспринимаемых. Ведь дело геодезии измерять не цилиндр или конус, но груды в форме конуса, или колодцы в форме цилиндра; и не с помощью мыслимых прямых, а с помощью ощущаемых, иногда точнее – по солнечным лучам, [40] иногда грубее – по верёвке или линейке. И счетовод рассматривает не свойства чисел как таковые, но число ощущаемого, почему и называет их по тому, что измеряется, например число яблок или число сосудов[66]. И в отличие от арифметика он не допускает существование наименьшего вообще, поскольку наименьшее для него принимает род того, к чему относится. Ведь один человек является для него мерой множества и потому – единицей[67].

[65] Платон, *Политик* 299e; *Послезаконие* 990cd.

[66] Платон, *Законы* 819be. См. также *Палатинская антология*, XIV, задачи 3, 17–19, 50.

[67] Ср. Герон, *Определения* 135, 5–6; см. также схолию к *Хармиду* 165e.

И опять, оптика и каноника суть порождения геометрии и арифметики. Первая использует зрительные лучи в качестве прямых и составляет из них углы, и делится на собственно оптику, устанавливающую причину искажения зрительных явлений на расстоянии, например, теорию схождения параллельных или округления квадратов, и на всю катоптрику, имеющую дело со всевозможными преломлениями и связанную со знанием уподоблений, и указывающую правила так называемой сценографии: как сделать так, чтобы картины не казались лишёнными числа и формы и верно передавали на расстоянии высоту изображаемого[68]. А каноника рассматривает слышимые гармонические отношения, отыскивая разделения канонов[69], всякий раз опираясь на ощущение [41] и, как сказал Платон, применяя «слух ума»[70].

К ним добавляется так называемая механика, являющаяся частью занятий ощущаемым и материальным, а в неё входит изготовление военных орудий, и таковы те оборонительные орудия, которые, как говорят, изобрел Архимед[71] во время осады Сиракуз; а также искусство фокусов, использующие или потоки воздуха, чем занимаются Ктесибий[72] и Герон[73], или весы, неуравновешенность которых вызывает движение,

[68] Ср. Витрувий, *Об архитектуре* VII, предисл., 11, где сообщается, что первые сочинения по этому предмету составили Анаксагор и Демокрит.

[69] Входящее в евклидовский корпус сочинение по теоретической гармонике так и называется: *Деление канона*.

[70] Платон, *Государство* 531ab.

[71] Архимед (282–212 до н. э.) – крупнейший древнегреческий математик, механик и инженер.

[72] Ктесибий Александрийский (III в. до н. э.) – механик, автор книги *Пневматика*.

[73] Герон Александрийский (I в. н. э. ?) – геометр и механик, автор книг *Пневматика* и Об *автоматах*.

а уравновешенность – покой, как это показано в *Тимее*;[74] при этом нити и веревки создают впечатление одушевлённых влечений и движений. К механике относится учение о равновесии в целом и об установлении так называемых центров тяжести,[75] а также изготовление сфер, подражающих круговращению небес, чем занимался и Архимед; и в целом всё учение о движении материи.

Осталась ещё астрономия, имеющая дела с космическими движениями, а также с величинами и фигурами небесных тел, их яркостями, их расстояниями (ἀποστάσεις) от Земли и всем таким прочим. Она многое заимствует у ощущения, многое – у физических теорий. Её частями являются гномоника, измеряющая время с помощью гномона; [42] наблюдение за небесными явлениями (μετεωροσκοπική), измеряющее высоту и долготу светил и обучающее превеликому множеству разных других вещей, рассматриваемых теоретической астрономией; и диоптрика, устанавливающая расстояния (ἀποχάς) между Солнцем, Луной и 5 другими светилами[76] с помощью соответствующих инструментов.[77] Вот что сказано о частях математики в сочинениях древних.

[74] Платон, *Тимей* 57d.

[75] См. Архимед, *О равновесии плоских фигур, или о центрах тяжести плоских фигур*.

[76] В тексте: τὰς ε ἀποχὰς ἡλίου καὶ σελήνης καὶ τῶν ἄλλων ἄστρων. Я предлагаю читать τὰς ἀποχὰς ἡλίου καὶ σελήνης καὶ ε τῶν ἄλλων ἄστρων.

[77] Расстояния- ἀποστάσεις, о которых говорилось несколько выше – это реальные расстояния от Земли до Луны и Солнца; их измерением занимались Аристарх Самосский (III в. до н. э.), Гиппарх (II в. до н. э.) и другие астрономы. Расстояния-ἀποχάς – это угловые расстояния между небесными светилами.

Глава 14. Почему венцом математических наук считается диалектика?

Теперь мы снова рассмотрим, почему Платон в *Государстве* назвал диалектику венцом наук [78], и какова их связь, как она изложена в *Послезаконии* [79]. Мы утверждаем, что как ум утверждён над разумом и предоставляет ему сверху начала, и совершенствует собой разум, так и диалектика, будучи чистейшей частью философии, в своей простоте стоит прямо над математическими науками, и целиком охватывает их развернутость, и придаёт наукам их разнообразные способности – осуществительную, рассудительную и мыслительную, – я говорю здесь об анализе, разделении, определении и доказательстве. [43] Будучи наделена ими и доведена до совершенства, математика одно отыскивает аналитически, другое – синтетически, одно излагает через разделение, другое – через определение, а иногда постигает искомое при помощи доказательства. Она согласует эти методы со своим предметом, и пользуется каждым из них ради созерцания промежуточных логосов; и поэтому анализ, определение, разделение и доказательство принадлежат ей и развёртываются на пути математического знания. А венцом математических наук естественно служит диалектика; ведь она совершенствует всю их мысль, делает неопровержимой их точность, сохраняет в неподвижности их неизменность, возводит их нематериальность и чистоту к простоте и нематериальности ума, логически определяет их первые начала, обнаруживает родовые и видовые различия их предметов и научает синтезу, выводящему из начал то, что идёт за ними, и анализу, восходящему к первому и началам.

[78] Платон, *Государство* 534е.
[79] Платон, *Послезаконие* 991е.

И поэтому не следует вслед за Эратосфеном [80] считать скрепой математических наук пропорцию [81]. Ведь пропорция и считается, и является лишь одним из того, что обще математическим наукам. Кроме неё через все математические науки проходит много другого, по своей сути относящегося [44] к общей природе этих наук. А мы бы сказали, что их постоянная скрепа – это единая и целая математика, охватывающая в себе начала всех отдельных наук в простейшем виде, рассматривающая их различия и научающая как тому, что в них всех одинаково, так и тому, что присуще их большинству или меньшинству. И потому учащиеся должны от многих наук восходить к ней одной. Но ещё более высокой скрепой математических наук служит диалектика, которая, как уже сказано, названа в *Государстве* их венцом. Ведь она завершает математику в целом, возводит её своими способностями к уму, показывает, что она – наука по сути, и делает её устойчивой и неопровержимой. На третьей же ступени среди скреп стоит сам ум, единообразно охватывающий в себе все диалектические возможности, сводящий их разнообразие в свою простоту, разделённость – в неделимое знание, и множественность – в единство. Он свёртывает развёрнутость диалектических методов и схватывает сверху всю последовательность математических рассуждений; и он – наилучшая цель дальнего странствия и познавательной деятельности. Но об этом сказано достаточно.

[80] Эратосфен Киренский (середина III в. до н. э.) – разносторонний учёный, руководивший александрийским Мусейоном. По-видимому, здесь цитируется его сочинение *Платоник*.

[81] Папп в *Математическом собрании* III, 18 приписывает это же учение Платону: «Божественный Платон говорит, что пропорция есть природная причина всех гармоний и всякого благоразумного и упорядоченного рождения. Ведь он говорит, что единственной связью всех математических наук, причиной порождения и вечной связью всего порождённого служит божественная природа пропорции».

Глава 15. Возникновение имени математики

О самом имени «математика» и о математических науках нам следует сказать, почему древние дали его этим наукам [45] и каковы доводы в пользу этого. Мне думается, что это имя было дано науке разумных рассуждений – как и большинство имён – не случайными людьми, но как говорят, пифагорейцами. Они знали, что всякое так называемое научение есть вспоминание (μάθησις ἀνάμνησίς ἐστιν). Оно не внедряется в души извне, как в воображении отпечатываются воспринимаемые образы, и не является эпизодическим, как знание, основанное на мнении, но, хотя и пробуждается явлениями, однако же возникает внутри от самого разума, обращённого к самому себе. Они знали также, что хотя вспоминание может возникнуть от множества разных причин, но в особенности, как говорит и Платон, оно возникает от математических наук: «Если обратить кого-нибудь к чертежу, то тут яснее всего обнаружится, что научение есть вспоминание» [82]. Вот и Сократ в *Меноне* с помощью таких умозаключений показал, что научение – это вспоминание душою своих же логосов [83]. Причина этого в том, что вспоминание – свойство разумной части души. Оно осуществляется в научных рассуждениях, причем разум знает их уже заранее, до всякого действия по ним. [46] Он обладает ими всеми в своей сокровенной сути, но проявляет каждое из них, когда отвлекается от помех восприятия. Ведь восприятия сводят его с частным, воображение наполняет изменяющими форму движениями, а вожделения увлекают к подверженной страстям жизни. Всё частное служит препятствием на пути нашего обращения к самим себе; всё меняющее форму затем-

[82] Платон, *Федон* 73b.
[83] Платон, *Менон* 82b.

няет не имеющее формы знание; и всё подверженное страстям служит помехой для бесстрастной деятельности. Освобождая разум от этого, мы можем познавать его логосы, быть знающими на деле и обнаруживать подлинное знание. А оставаясь в оковах и смежая око души, мы не обретём подобающего нам совершенства.

Итак, само научение есть вспоминание вечных логосов, находящихся в душе; а поэтому математикой называется знание, которое в конце концов подводит нас к их вспоминанию. И дело этой науки ясно из её имени: это продвижение врожденного знания, пробуждение мысли, очищение разума, прояснение присущих нам видов, освобождение нас от оков безрассудства; причем всё это – в согласии с богом, сущим блюстителем этой науки, который выводит на свет дары мысли, [47] наполняет всё божественным логосом, продвигает душу к уму и словно пробуждает от глубокого забытья, обращает наш поиск на самих себя, совершенствует его повивальным искусством, а открытием чистого ума подводит к блаженной жизни. Посвятив ему своё сочинение, перейдём теперь к описанию теории математической науки.

ВВЕДЕНИЕ. Часть II

[48] *Глава 1.* Геометрическая материя

В предшествующих рассуждениях мы рассмотрели общие и распространяющиеся на всю математическую науку положения, следуя Платону и выбирая у других те мысли, которые соответствуют нашему предмету. Теперь мы скажем и о самой геометрии, а также о предложенных *Началах*, ради которых предпринято всё это рассуждение.

Что геометрия есть часть математики в целом и что она стоит на втором месте вслед за арифметикой, от которой у неё совершенство и определённость (ведь всё, что в ней выразимо и познаваемо, определяется числовыми отношениями), – сказано древними и не нуждается в пространном изложении. Но наше руководство будет иметь смысл, если мы рассмотрим, какое место в порядке сущих занимает её материя, и какова её сущность. [49] Ведь при должном её рассмотрении будут обнаружены возможности познающей её науки, а также польза и благо для тех, кто её изучает.

Ибо может возникнуть затруднение, в каком роде сущих следует помещать геометрическую материю, не погрешая против истины о ней. Ведь если фигуры, о которых рассуждает геометр, принадлежат к ощущаемому и неотделимы от материи, как же мы тогда утверждаем, что геометрия освобождает нас от ощущаемого и приводит к бестелесному существованию, и приучает к созерцанию умопостигаемого, и подготавливает к

мыслительной деятельности? И где мы видим в ощущаемом точку без частей, или линию без ширины, или поверхность без толщины, или равенство линий из центра круга, и в целом все многоугольные и многогранные фигуры, о которых учит геометрия? И как остаются неопровержимыми логосы этой науки, если ощущаемые фигуры и виды могут быть бо́льшими и меньшими, всячески движутся и изменяются, полны всяческой материальной неопределённости, когда равенство сосуществует с противоположным ему неравенством, а неделимое оказывается делимым и протяжённым?

Если же предмет геометрии находится вне материи, если это чистые логосы, отделённые от ощущаемого, то все они будут лишены частей, телесности и величины. Ведь вытянутость, объём и протяжённость в целом прирождены логосам из-за материального пристанища, которое воспринимает неделимое делимым, [50] непротяжённое – протяжённым, а неподвижное – движущимся. Как тогда мы делим прямую, треугольник и круг? И как мы говорим о различии углов и их увеличении, и об уменьшении фигур, например, треугольных и квадратных, и о касании кругов и прямых? Ведь всё это показывает, что геометрическая материя делима и не существует в не имеющих частей логосах.

Таковы эти затруднения, – да ещё и Платон называет геометрические виды постигаемыми размышлением, отвлекающими нас от ощущаемых вещей и пробуждающими от ощущения к уму, хотя, как я сказал, в размышлении логосы являются неделимыми и непротяжёнными лишь сообразно особенностям души. И если должно согласовать наши логосы с самими вещами и с изложением Платона, мы сделаем следующее разделение: всё общее и единое, объемлющее какое-либо многое, либо обнаруживается в нём и обладает наличным бытием, нераздельным с этим единым, утверждённым в нём и вместе с ним, двигаясь ли вместе с ним, или неподвижно пребывая в

покое; либо оно существует до многого, и [51] порождает множество, и придаёт ему своё выражение, и, будучи нераздельно помещённым прежде того, что ему причастно, уделяет вторичному разнообразную причастность; либо оно создаётся в мысли путём отвлечения от многого, и обладает существованием позднейшего происхождения, и в качестве рождённого позднее сосуществует с многим. В соответствии с этими тремя разделами мы найдём, что одно существует до многого, другое – во многом, а третье – относясь к нему по той или иной категории.

И поскольку есть три вида всеобщего, рассмотрим различие того, что допускает причастность, сообразно его материи. Приняв, что имеются два вида причастного, – существующее в ощущении и в воображении (ведь и материи две, причем одна – у ощущаемого, а другая – у воображаемого, как где-то говорит Аристотель [1]), мы допустим, что всеобщее также бывает двух видов: ощущаемое, которому причастны ощущаемые, и воображаемое, существующее в воображаемом множестве. Ведь воображение, через движение формы и существование с телом и в теле, является носителем измеримых, [52] раздельных и фигурных оттисков; и всё, что оно познаёт, обладает таким существованием. Поэтому воображение иногда даже называют воспринимающим умом. Но если это ум, как он может быть воспринимающим и материальным? И если оно действует через восприятие, верно ли называть его умом? Ведь уму и природе ума соответствует невосприимчивость, а восприятие от них далеко. Но я думаю, что его называют так, чтобы указать его среднее положение между высшими и низшими познаниями: умом – по сходству с первыми, воспринимающим – по сходству с последними. Ведь познание без фигур и форм содержит умопостигаемое в себе самом, оно действует на себя,

[1] Аристотель, *О душе* 430a24.

и является одним с познаваемым, будучи чистым от всякого внешнего отпечатка и восприятия. А низшие познания действуют через органы чувств и скорее возникают в результате восприятия внешнего знания, и они меняются вместе с предметом. И Платон говорит, что таковы ощущения, возникающие от непроизвольных восприятий[2]. А воображение, будучи средоточием познаний, хотя и возбуждается самим собой и производит познаваемое, однако же, не будучи вне тела, переводит познаваемое из неделимой жизни в делимое, протяжённое и имеющее фигуру, и тем самым всё, что оно ни помыслит, является отпечатком и формой мысли. И оно мыслит круг протяжённым, то есть чистым от внешней материи, [53] но не от умопостигаемой материи, имеющейся в воображении; и в нём имеется не один круг, как и в области ощущаемого. Ведь вместе с протяжением появляется большее и меньшее, а также множество кругов и треугольников.

Поэтому если в ощущаемых кругах имеется всеобщее, так что все они подобны между собой как существующие по одному логосу, хотя они и различаются по величине или по материалу, то и в воображаемых кругах есть нечто общее – то, чему все они причастны и благодаря чему обладают одной и той же формой. А различаются они только одним: воображаемой величиной. Ведь если вообразить много концентрических кругов, то хотя все они существуют в едином нематериальном субстрате и в той жизни, которая неотделима от простого тела, умножающего неделимые сущности благодаря протяжению, однако они различаются по великости и малости, а также по тому, что одни из них охватывают другие. А потому во множественном надо мыслить два вида всеобщего: одно – в ощущаемом, другое – в воображаемом. И двойственен логос круга, и треугольника, и

[2] Платон, *Тимей* 42а.

всякой фигуры: одни – в умопостигаемой материи, другие – в ощущаемой. Ведь им предшествует и мысленный логос, и природный: один обеспечивает наличие и единый вид воображаемых кругов, другой – ощущаемых. И таковы круговые движения неба и в целом все те, какие производит природа.

При этом и мысленный, и природный логос неделимы. [54] В бестелесных причинах они протяжены без протяжения, разделены на части без разделения и обладают величиной без величины; и напротив, в телесных причинах они не делятся на части в качестве делимых и лишены величины в качестве имеющих величину. И потому мысленный круг един, прост и непротяжён, поскольку сама величина там лишена величины, будучи логосом без материи, и фигура лишена очертаний; а в воображении он делим, оформлен и протяжён, не только единый, но единый и многий, и не только вид, но установленный вид; а в ощущаемом он обладает меньшей точностью, обременён прямизной и лишён чистоты нематериального [3]. И вот геометрия, когда она говорит о круге, его диаметре и проделываемых над ним действиях, учит не об ощущаемом, стремясь к отвлечению от него, – но и не о мысленном виде. Ведь этот круг один, а она производит свои логосы для многих, рассматривая во всех них одно и то же. И он неделим, а круг в геометрии – делим. Но она усматривает в нём всеобщее, имеющее место в воображаемых кругах, причём один круг она видит, другой, который в мысли, – рассматривает, а для третьего производит доказательства. Ведь мысль, обладая логосами, [55] но будучи не в состоянии рассматривать их сложные сочетания, упрощает их и выводит в воображение, которое находится в преддверии [4], и в нём или через него разворачивает знание о них, возлюбив отделение от

[3] Платон, *VII письмо* 343a.
[4] Платон, *Филеб* 64c.

ощущаемого и найдя воображаемую материю подходящей восприемницей для его видов.

И это мышление производит составление и разделение фигур в воображении, и хотя это знание и ведёт к мысленной сущности, однако не поднимается до неё, поскольку мысль глядит на внешнее, рассматривая его сообразно внутреннему, и пользуется проявлениями логосов, однако движется вовне от себя. Но если бы когда-нибудь, свернув протяжённое и рассматривая отпечатки и множественное без отпечатков и в единообразии, оно могло вернуться к себе самому, тогда оно узрело бы геометрические логосы – неделимые, непротяжённые, сущностные, полнотою которых оно является. И тогда геометрическая деятельность сама стала бы достойной целью и поистине результатом гермесова дара, уводящего нас от некоей Калипсо [5] к совершеннейшему и мыслительному знанию и освобождающего от образных форм воображения. Так что истинный геометр должен неустанно заботиться об этом и как к цели стремиться к пробуждению и к переходу от воображения к самому по себе разуму, отклоняя себя от протяжения [56] и воспринимающего ума к мыслительной деятельности, благодаря которой он будет непротяжённо и неделимо видеть круг, диаметр, вписанные многоугольники, – всё во всём и каждое в отдельности. Ведь ради этого мы и в воображении показываем вписанные круги в многоугольниках и многоугольники в кругах, подражая взаимообнаружению неделимых логосов. И ради этого мы описываем составление фигур, их возникновение, разделение, а также их положения и приложения. При этом мы прибегаем к воображению и его протяжениям, тогда как вид сам по себе неподвижен, нерождён, неделим и полностью чист от субстрата.

[5] Гомер, *Одиссея* V, 55–147: Гермес передает нимфе Калипсо приказ богов освободить Одиссея и позволить ему вернуться домой.

Однако всё, что в нём скрыто, выводится в область воображения как протяжённое и делимое, что проявляется в разуме. И при этом проявляется мысленный вид, а происходит это в так называемом воспринимающем уме, который развёртывает себя вдоль неделимости истинного ума, отделяет себя от непротяжённости чистого разума, придаёт себе ту или иную форму сообразно всем бесформенным видам и становится всем тем, что есть разум и наш неделимый логос.

Вот что мы можем сказать о геометрической материи, не забывая о том, что философ Порфирий написал в своей *Смеси*[6], и о том, что излагается большинством платоников, и полагая при этом, что всё это хорошо согласуется с подходами геометров, [57] а также с Платоном, который называет предмет геометрии разумным. И это согласуется между собой, поскольку причины геометрических видов, по которым разум выдвигает доказательства, находятся в нём самом, а делимые и соединяемые фигуры проявляются в воображении.

Глава 2. Предмет геометрии

Теперь поговорим о том, что представляет собой эта теоретическая наука. Геометрия есть знание величин, фигур и их границ, а также отношений между ними и их свойств, всевозможных положений и движений. Она начинается с неделимой точки, завершается телами и исследованием многообразных различий между ними, и возвращается от более сложного к более простому и к его началам. Она пользуется синтезом и анализом, всегда начиная с предпосылок, беря начала от знания о

[6] Порфирий из Тира, ученик Плотина. Среди его сочинений был и комментарий к *Началам* Евклида, на который несколько раз ссылается Прокл.

них и используя все методы диалектики. Имея дело с началами, она пользуется отделением видов от родов и определяющими логосами; имея дело с тем, что следует за началами, она пользуется доказательством и анализом, чтобы показать переход от более простого к более сложному и обратное возвращение к более простому. И она отдельно производит логосы своего предмета, отдельно – аксиомы, от которых [58] она переходит к доказательствам, отдельно – постулаты, отдельно – существенные свойства, показывая, что и они присущи её предмету. Ведь в каждом знании одно – это род, с которым имеют дело и свойства которого предполагается рассмотреть; другое – начала, которыми пользуются для доказательств; третье – присущие им свойства[7]. И если аксиомы общи всем наукам, хотя каждая пользуется ими применительно к подлежащей ему материи, то род и существенные свойства – различны.

Предмет геометрии – это треугольники, квадраты, круги и фигуры в целом, их величины и границы; то, что им свойственно, – это деление, отношения, касания, равенства, приложения, в том числе с избытком и с недостатком, и всё такое прочее; а также постулаты и аксиомы, из которых ведётся каждое доказательство, – то, что между любыми двумя точками проходит единственная прямая, или то, что если от равных отнять равные, то и остатки будут равны, и тому подобное. Поэтому не всякая задача и не всякий вопрос будут геометрическими, но лишь те, которые исходят из геометрических начал, и геометрически может быть опровергнуто лишь то, что из них исходит. А всё, что из них не исходит, не является геометрическим, но лежит вне геометрии[8]. Но это последнее двояко: оно либо целиком исходит из других начал, и вопросы музыки мы на-

[7] Аристотель, *Вторая аналитика* 75a41.

[8] Аристотель, *Вторая аналитика* 77a40–b33.

зываем негеометрическими, потому что их рассмотрение исходит всецело из других предпосылок, нежели начала геометрии; либо оно пользуется геометрическими началами, [59] однако превратно, как в случае утверждения, что параллельные встречаются. Поэтому геометрия даёт нам критерии, на основании которых мы можем распознавать, что соответствует её началам, а что отступает от истины. С помощью этих способов можно показать, в чем состоит ошибка ложного умозаключения.

Глава 3. Различие геометрии и арифметики

Но одно вытекает из геометрических начал, другое – из арифметических. О других науках, которые стоят очень далеко от этих, я и не говорю. И почему говорят *** [9] они гораздо дальше от этих. А из этих двух наук одна точнее другой, как говорит Аристотель [10]: та, которая исходит из более простых предпосылок, точнее той, которая пользуется более сложными началами; та, которая говорит «почему», точнее той, которая познает «что»; и та, которая имеет дело с умопостигаемым, точнее той, которая касается ощущаемого. И по точности арифметика точнее геометрии, ведь её начала отличаются простотой. Единица лишена положения, а точка имеет положение; и началом геометрии служит точка, получившая положение, а началом арифметики – единица. И геометрия точнее сферики, а арифметика – музыки, ведь первые дают всеобщие причины для теорем вторых; и геометрия точнее механики и оптики, [60] поскольку те рассуждают об ощущаемом. Поэтому начала арифметики и геометрии превосходят начала прочих наук, однако их собственные предпосылки разнятся между собой так,

[9] Лакуна в тексте.
[10] Аристотель, *Вторая аналитика* 87a31–37.

как сказано, хотя между ними есть и нечто общее; поэтому из того, что они рассматривают и доказывают, одно будет общим для обеих, а другое – у каждой особенное.

Так всякое отношение является выразимым в арифметике, но не в геометрии, потому что в геометрии имеются невыразимые отношения. И только в арифметике найдётся наименьший квадратный гномон [11], а в геометрии вообще нет ничего наименьшего. А к особенностям геометрии относятся положение (числа не имеют положения), касание (касаются только непрерывные), иррациональность (иррациональное там, где есть бесконечное деление). Общим у обеих наук будет то, что связано с разделением, и Евклид излагает это во второй книге, за исключением деления прямой в крайнем и среднем отношении.

И одни из этих общих теорем переносятся из геометрии в арифметику, другие – из арифметики в геометрию, а третьи сходно переходят к ним из общей математической науки. Таковы перестановка и обращение отношений, их составление и разделение, общие обеим. А соизмеримые величины арифметика рассматривает первично, а геометрия – во вторичном подражании. Ведь соизмеримые величины по определению суть те, [61] которые относятся друг к другу, как число к числу, так что соизмеримость прежде всего существует в числах. Ведь где число, там и соизмеримое, а где соизмеримое, там и число. А вот то, что относится к треугольникам и квадратам, геометрия рассматривает первично, а арифметика – по аналогии с ней. Ведь фигуры существуют в числах как в своей причине. Поэтому мы, начав с результатов, переходим к их причинам в числах, и в одних случаях наблюдаем одинаковые свойства (так всякий

[11] Гномон – разность двух квадратных чисел в арифметике и двух квадратов в геометрии. О гномоне в геометрии см. кн. II, опр. 2.

многоугольник делится на треугольники [12]), а в других довольствуемся частичным сходством (так в геометрии имеется квадрат, вдвое больший другого квадрата, а в числах – нет, но мы говорим, что один квадрат вдвое больше другого за вычетом единицы: к примеру, квадрат семёрки вдвое больше квадрата пятёрки за вычетом единицы [13]).

Мы так много говорили об этом, потому что рассматривали, в чём общность начал этих двух наук и в чём различие. Ведь геометр рассматривает, с какими общими началами согласуются общие теоремы, а с какими – особенные, и на основании этого различает негеометрическое и геометрическое, и относит одно к одной науке, а другое – к другой.

Глава 4. Геометрия в целом. Применение геометрии

А теперь мы снова рассмотрим геометрию в целом, откуда она исходит и чем завершается, и каков миропорядок её логосов. [62] Представим, как она распространяется по всему сущему, как применяет ко всему своё разумение и охватывает в себе все виды, озирая подлинно сущее с вершин своей мысли, а через образы наставляя об особенностях божественного миропорядка и о возможностях мыслительных видов: ведь в

[12] Разложение многоугольных чисел на треугольные непосредственно усматривается из соответствующего чертежа.

[13] Платон в *Государстве* 546c говорит о «выразимой диагонали пятёрки». Комментарий к этому месту даёт Теон Смирнский в *Изложении математических принципов, полезных при чтении Платона* 42.10–44.17, описывая алгоритм построения пар сторонних и диагональных чисел, удовлетворяющих соотношению $a^2 = 2b^2 \pm 1$. Прокл также обсуждает эту схему *Комментарии к Государству Платона* II, 24.16–25.13, 27.1–29.4.

её воззрениях содержатся логосы, связанные с этими видами, причем она показывает, какие фигуры подобают богам, какие – первым сущностям, а какие – существованию душ. Далее, в соответствии со своим средним познанием она разворачивает мысленные логосы, множит их, рассматривает их разнообразие, уясняет их бытие и их свойства, их единство и различие, и затем охватывает ограничительными пределами воображаемые фигуры разных форм и возводит их к сущностному существованию логосов. Наконец, в соответствии с третьим проявлением мысли она рассматривает природу, а также учит о видах ощущаемых элементов, связанных с ними возможностях и содержащихся в их логосах причинах. Ведь она обладает образами целостных умопостигаемых родов и образцами ощущаемых; но сама она существует среди мысленных видов, посредством которых она восходит и нисходит как к целостному бытию, так и к возникающему.

Вечно геометрически философствуя о сущих [63] в соответствии со всеми логосами её достоинств, она заключает в себе образы всего умного, душевного и природного, а также перечисляет все виды государственного устройства и в самой себе показывает их разнообразные перемены; и действуя нематериально и познавательно, хотя и соприкасаясь с материей, она производит из себя многие науки, такие как геодезию, механику, оптику, благодаря которым она благодетельствует жизни смертных. Ведь она создаёт с их помощью орудия войны и городские укрепления, дает знание о смене времен года и о положении отдельных местностей, учит об измерении сухопутных и морских путей, сооружает рычаги и весы, устанавливает числовое равенство городов, с помощью образов проясняет порядок всего космоса, и многое недостоверное разъясняет и удостоверяет для всех людей. Так передают слова Гиерона Сиракузского об Архимеде: когда он построил триеру, которую хотел отправить Птолемею, царю Египта, и все сиракузяне

вместе не могли спустить корабль на воду, Архимед устроил так, что Гиерон смог это сделать один. Поражённый, он сказал: «С этого дня – верить всякому слову Архимеда» [14, 15]. Говорят, что и Гелон сказал то же самое, когда Архимед, не ломая устроенной короны, [64] сумел определить вес каждого входящего в неё материала. Об этом писали многие наши предшественники, воздавая хвалу математике: мы же при изложении общего знания геометрии и её применений привели из этого множества лишь малую часть.

Глава 5. Возникновение и развитие геометрии

Теперь мы поговорим о развитии геометрии в данном периоде. Вдохновенный Аристотель утверждает, что одни и те же мнения часто возникают у людей через некие определенные периоды целого [16], поэтому науки впервые были созданы не нами или теми, кого мы знаем, но уже появлялись во время прежних круговоротов (и неизвестно, сколько их было) и опять будут появляться в будущих. Но поскольку нам следует рассмотреть начала искусств и наук применительно к данному периоду, мы говорим, что геометрия, согласно большинству историков, впервые открыта у египтян, и она ведёт своё происхождение от измерения земельных участков. Она была необходима, потому что разливы Нила всякий раз уничтожали установленные

[14] Весь этот рассказ представляет собой чистейший вымысел, в чём нетрудно убедиться, вспомнив «золотое правило механики». Одно дело – теоретическая возможность одному человеку спустить корабль на воду с помощью механических приспособлений, и совсем другое дело – практическая осуществимость этой возможности.

[15] Ср. Плутарх, *Жизнеописание Марцелла* 29.

[16] Аристотель, *О небе* 270b19, *Политика* 1329b25, *Метафизика* 1074a38, *Метеорологика* 339b19.

межи. Нет ничего удивительного, что изобретение и этой, и прочих наук начинается с нужды, ведь всё возникающее переходит [65] от несовершенного к совершенному. Поэтому естественен переход от ощущения к рассуждению, а от него к уму. И как точное знание о числе берёт своё начало у финикийцев благодаря торговле и обмену, точно так же и геометрия была открыта у египтян по названной причине [17].

Фалес [18], посетивший Египет, первым перенес в Элладу эту теорию, причем многое он открыл сам, а для многого указал начала последователям, представив одно более общим способом, а другое – более наглядным. Затем Мамерк [19], брат поэта Стесихора, также занимался геометрией, о чём имеется упоминание, причем Гиппий из Элиды [20] пишет, что в геометрии он прославился. За ними Пифагор [21] преобразовал любовь к гео-

[17] Следующий ниже очерк, так называемый «каталог геометров», восходит к *Истории геометрии*, написанной Евдемом Родосским, учеником Аристотеля.

[18] Фалес Милетский (начало VI в. до н. э.) – по общему мнению древних, один из создателей геометрической науки. Прокл ссылается на него несколько раз: 157.11, 250.20, 299.4, 352.15.

[19] Мамерк ничем более не известен. Его брат Стесихор жил в начале VI в. до н. э.

[20] Гиппий Элидский – знаменитый софист конца V в. до н. э., известный нам в том числе по диалогам Платона. К его математическим открытиям относится специальная механическая кривая, применяемая для деления данного угла на произвольное число частей (272.7, 356.11). Эта же кривая впоследствии была применена Диностратом для спрямления окружности и квадрирования круга; по этой причине она получила название квадратрисы.

[21] Пифагор Самосский – знаменитый создатель пифагорейской школы, живший в начале V в. до н. э. О математических открытиях самого Пифагора нам мало чего известно; зато мы определённо можем утверждать, что пифагорейская школа решающим образом определила направления последующего развития древнегреческой математики. Весь текст о Пифагоре совпадает с Ямвлихом, *Об общей математической науке* 70.1–3.

метрической мудрости в форму свободного образования, рассмотрев ее начала сверху и исследуя теоремы отвлечённо от материи и умозрительно: именно он открыл иррациональные величины и строение космических тел. Вслед за ним многих геометрических вопросов касались Анаксагор из Клазомен[22] [66] и Энопид из Хиоса[23], который несколько моложе Анаксагора; Платон в *Соперниках* упоминает о них как о прославившихся в математических науках[24]. За ними в геометрии проявили себя Гиппократ Хиосский, открывший квадрируемые луночки,[25] и Феодор из Кирены[26]; причём Гиппократ упоминается как автор первых *Начал*.

За ними был Платон, – и геометрия, равно как и прочие математические науки, получила его стараниями величайшее развитие: известно, сколь часто он использует в своих сочинениях математические рассуждения и повсюду пробуждает ими восторг в преданных философии. В это же время жили Леодамант

[22] Анаксагор Клазоменский жил в Афинах в первой половине V в. до н. э. Из его математических занятий известно об исследованиях по теории перспективы. Ему же принадлежит ключевая для геометрии идея бесконечной делимости.

[23] Энопид Хиосский – астроном, разработавший также методы решения некоторых простых задач с помощью циркуля и линейки (283.7, 333.5).

[24] Платон, *Соперники* 132a.

[25] Гиппократ Хиосский рассматривал также задачу удвоения куба: он свёл её к задаче о вставке двух средних пропорциональных между двумя отрезками, один из которых вдвое больше другого (213.3). О квадрировании луночек см. Симпликий, *Комментарий к Физике Аристотеля* 60.22–68.32.

[26] Феодор Киренский, известен как учитель Платона в геометрии (Диоген Лаэрций III, 6). Является одним из действующих лиц диалога Платона *Теэтет*, в котором имеется важное свидетельство об одном из первых способов доказательства иррациональности квадратных корней, основанном на методе чётных и нечётных чисел.

с Фасоса[27], Архит из Тарента[28] и Теэтет из Афин[29], благодаря которым умножились теоремы и состав геометрии стал более научным. Младше Леодаманта был Неоклид и его ученик Леонт[30], которые многое добавили к сделанному до них. Леонт составил *Начала*, более тщательные как по количеству, так и по полезности доказываемого; и он нашел ограничения, [67] когда искомая задача может быть разрешена и когда не может. Евдокс Книдский[31], чуть младший Леонта, был дружен с окружением Платона; он первый увеличил количество так называемых общих теорем, прибавил к трём пропорциям ещё три[32] и, взяв у Платона начала сечений, разработал множество их видов, пользуясь методом анализа. Амикл из Гераклеи[33], один из друзей Платона, и Менехм[34], ученик Евдокса и современник Пла-

[27] Прокл говорит ниже (211.19), что Платон научил Леодаманта методу анализа.

[28] Архит Тарентский – старший современник и друг Платона. Ему принадлежит первое решение задачи об удвоении куба, в котором использовалось хитроумное пространственное построение. По-видимому, ему же принадлежит большая часть небольшого сочинения по теории музыки *Деление канона*, входящего в евклидовский корпус, равно как и VIII книга *Начал*.

[29] Теэтет Афинский, живший в первой половине IV в. до н. э., заложил основания теории классификации иррациональностей (X книга *Начал*) и разработал методы построения пяти правильных многогранников (XIII книга *Начал*).

[30] О них ничего более не известно.

[31] Евдокс Книдский – крупнейший математик IV в. до н. э. Разработал общую теорию пропорций (V и VI книги *Начал*), открыл метод исчерпывания, нашёл ещё одно решение задачи об удвоении куба. В астрономии создал теорию небесных сфер, объясняющую видимые движения планет.

[32] Ср. Никомах Геразский, *Введение в арифметику* II, 28.

[33] Ничем более не известен.

[34] Менехм известен как открыватель конических сечений (111.22), с помощью которых он, в частности, решил задачу об удвоении куба. Прокл ссылается на него несколько раз (72.24, 78.9, 254.4).

тона, а также его брат Динострат [35] сделали геометрию в целом ещё более совершенной. А Февдий из Магнесии считался выдающимся как в математических науках, так и в остальной философии; и он составил хорошие *Начала* и многие частные положения перевёл в более общие [36]. В это же время жил Атеней из Кизика [37], который проявил себя во всех математических науках, но особенно в геометрии. Все они производили общие изыскания в Академии. А Гермотим из Кодофона [38] развил достижения Евдокса и Теэтета, открыл многие начала и описал некоторые геометрические места. Филипп из Менд [39], ученик Платона, [68] им обращенный к математике, проводил свои изыскания под руководством Платона и занимался тем, что было полезно для платоновской философии. Историки дошли в изложении этой науки до этого времени.

Немного младше последних – Евклид, составивший *Начала*, собравший многое за Евдоксом, усовершенствовавший многое за Теэтетом, а помимо этого приведший к неопровержимости те доказательства, которые раньше доказывалось менее строго. Этот муж жил при Птолемее I, ведь Архимед, также живший при нём, упоминает об Евклиде и рассказывает, как Птолемей однажды спросил его, есть ли более короткий путь изучения геометрии, нежели *Начала*; а тот ответил, что

[35] Динострат применил механическую кривую, изобретённую Гиппием для деления угла на произвольное число частей, к решению задачи о спрямлении окружности. Поскольку из спрямления окружности проистекает и квадратура круга, эта кривая получила название квадратрисы.

[36] Возможно, именно эти *Начала* регулярно цитирует Аристотель.

[37] Ничем более не известен.

[38] Ничем более не известен.

[39] Это безусловно Филипп Опунтский, редактор *Законов* Платона и автор *Послезакония*.

в геометрии нет царского пути. Он моложе окружения Платона и старше Эратосфена и Архимеда. Ведь те жили в одно время, как где-то говорит Эратосфен. Он принадлежит к платоникам и близок их философии, а потому он поставил целью всего своего изложения *Начал* описание так называемых платоновских тел.

Глава 6. Математические сочинения Евклида

У него есть и много других математических сочинений, [69] полных удивительной точности и научности рассмотрения. Таковы *Оптика*, *Катоптрика*, а также *Начала музыки*[40] и книга *О делении*. А в *Началах геометрии* им следует особо восхищаться за порядок и отбор приведенных теорем и задач. Ведь он берет не всё, что можно сказать, а лишь самое элементарное; и он применяет разнообразные виды силлогизмов, одни из которых получают достоверность от причин, другие же исходят из достоверных положений, но все они – неопровержимые, точные и свойственные науке. Помимо них он применяет все методы диалектики: разделения – при отыскании видов, определения – в описании сущности, доказательства – при переходе от начал к искомому, анализа – при обратном восхождении от искомого к началам. Он даёт весьма точное рассмотрение разных видов обращения – как более простых, так и более сложных: когда целому обратно целое, когда целому обратна часть и наоборот, и когда часть обратна части. Скажем также о связности отыскания, о расположении и порядке посылок и следствий, о силе, с какой он излагает каждый вопрос.

Разве можно не заметить, что случайно прибавляя что-либо к науке или отнимая от неё, мы впадаем в противостоящую ей [70] ложь и невежество? А поскольку многое кажется связан-

[40] До наших дней не сохранились.

ным с истиной и следующими началами науки, но тем не менее блуждает вдали от этих начал и обманывает людей поверхностных, он изложил методы рассудительного рассмотрения и для этого тоже, и, владея ими, мы сможем упражнениями подвести тех, кто только приступил к начаткам этой теории, к отысканию ложных умозаключений, чтобы сами они при этом не могли себя обмануть. Сочинение, в котором он даёт нам такую подготовку, он назвал *Ложные умозаключения*, перечислив в нём по порядку их разнообразные виды, предложив нашему разуму упражнения по каждой теореме, противопоставив лжи истину и опровергнув ложь сообразно способу её проведения. Эта книга – очистительная и предназначенная для упражнений, а *Начала* содержат самое научное рассмотрение предмета геометрии, неопровержимо и совершенно изложенное.

Глава 7. Назначение «Начал»

Если кто-нибудь спросит о цели этого сочинения, я скажу, что надо различать цель в предмете исследования и для ученика. О самом предмете мы скажем, что целостное изложение геометрии имеет дело с космическими телами, начиная с простых и кончая разнообразием составных, и, строя каждое из них в отдельности, она в то же время говорит, как они вписываются в сферу [71] и какие отношения имеют между собой. Поэтому некоторые возвели цель отдельных книг к космическому целому и описали пользу, которую они приносят при созерцании вселенной. А определяя цель для ученика, мы скажем, что она заключена в этом начальном курсе и в совершенстве его мысли во всей геометрии. Начав отсюда, мы сможем познать и прочие разделы этой науки, тогда как без них мы не сможем охватить все её разнообразие, и прочие науки тоже будут недоступными. Ведь здесь собраны первоначальные и простейшие теоремы, родственные первичным посылкам, и они располо-

жены в нужном порядке, а доказательства всего остального пользуются ими как уже известными и из них исходят. Так Архимед в книгах *О шаре и цилиндре*, и Аполлоний[41], и все прочие явно используют показанное в этом сочинении в качестве общепризнанных начал. И цель состоит в том, чтобы преподать учащимся начальный курс этой науки в целом и определить строение космических тел.

Глава 8. Смысл слова «элемент»

Но что такое элементарное руководство (στοιχείωσις) и слово «элемент» (στοιχεῖον), от которого это название ведёт своё происхождение[42]? Мы спрашиваем здесь о самом названии. [72] Некоторые теоремы называют элементами или элементарными (στοιχειώδη), тогда как другие так называться не могут. А элементами их называют, когда рассмотрение ведется ради других наук, и когда с их помощью мы разрешаем затруднения в этом другом. В самом деле, как записанные буквы являются первыми, простейшими и неделимыми началами, и из этих элементов состоит всякое слово, всякое высказывание и вся речь, так и в геометрии в целом есть некоторые исходные теоремы и начальные определения для последующего, распространяющиеся на всё и дающие доказательства для многих признаков; они и называются элементами. А элементарными положениями являются все те, которые хотя и распространяются на множество других случаев и обладают простотой и

[41] Аполлоний Пергский – один из крупнейших древнегреческих геометров, живший в конце III в. до н. э., автор фундаментальных *Конических сечений* и ряда других сочинений.

[42] По существующей традиции главное сочинение Евклида мы называем на русском языке *Началами*, хотя правильнее было бы называть его *Элементами*, как это и делается в других европейских языках.

изяществом, однако же не обладают свойством элементов, потому что наука о них не является общей для всей этой теории. Например, в треугольниках перпендикуляры, опущенные из угла на противоположную сторону, встречаются в одной точке. А то, познание чего не распространяется на множество случаев, не обнаруживает грации и изящества, не способно быть даже элементарным положением.

Но об элементе опять говорят двояко, как сказал Менехм. Ведь подготовительное – это тоже элемент для подготавливаемого, как первая книга Евклида для второй, а четвёртая – для пятой. [73] Но тогда многие предложения будут называться элементами друг для друга, поскольку они взаимно подготавливают друг друга. Так из того, что внешние углы прямолинейной фигуры равны четырём прямым, показывается, какому количеству прямых углов равны внутренние, и наоборот. И такие элементы схожи с леммами [43]. В ином смысле элементом называется то, из чего как из простейшего составлено сложное. Но тогда не всё высказанное будет элементом, но лишь самое первое в завершённом рассуждении; и постулаты суть элементы для теорем. В соответствии с этим значением слова «элемент» составлены *Начала* (στοιχεῖα) у Евклида, – элементы плоской геометрии и стереометрии. И многими написаны также элементарные руководства по арифметике и астрономии.

Но выбрать и расположить по порядку элементы каждой науки, из которых выводится всё остальное и на которые всё остальное разлагается, – это трудно. И одни из тех, кто пробовал это сделать, оставили их больше, другие – меньше, одни пользовались кратчайшими доказательствами, другие растягивали рассмотрение до бесконечности, одни отвергали способ сведения к невозможному, другие – пропорцию, иные же при-

[43] См. 211.1.

думывали, как обезвредить тех, кто отрицает начала; и в целом было открыто множество разных способов элементарного изложения. Но в этом деле не должно быть ничего лишнего, [74] потому что оно препятствует обучению; необходимо соединять и связывать все предложения, что полезнее всего для знания; надо продумать полное совмещение ясности и краткости, ведь эти противоположности затемняют нашу мысль; следует удерживать теоремы в общих пределах, потому что всё, что дробит процесс обучения, затрудняет усвоение знания. И во всём этом заметно, что элементарное руководство Евклида превосходит все остальные: оно полезно, потому что подводит к теории изначальных фигур; его ясность и членение обеспечиваются переходом от простейшего к разнообразному и тем, что теория начинается с общих понятий[44]; а общность доказательства достигается переходом к искомому через первичные и изначальные теоремы. И даже то, что кажется опущенным, на самом деле познаётся теми же способами, к примеру, построение неравносторонних и равнобедренных треугольников. Опущено и то, что ведёт к хитроумному и бесконечному разнообразию, чуждому элементарному изложению, – таково учение о неупорядоченных иррациональных, подробно изложенное Аполлонием; или то, что строится из изложенных причин, каковы многочисленные виды [75] углов и линий. Все это хотя и опущено и изложено другими полнее, однако же познается на основании простого. Вот что мы написали об элементарном руководстве в целом.

[44] Здесь «общие понятия» (κοιναὶ ἔννοιαι)– это другое название для аксиом (см. 194.9).

Глава 9. Порядок предложений в «Началах»

Теперь мы изложим в нашей речи устройство всего этого хозяйства в целом. Поскольку наука геометрия, как мы говорили, исходит из предпосылок и доказывает, выводя следствия из определённых начал, – ведь только одна наука исходит из беспредпосылочного начала, а остальные берут начала у неё, – постольку необходимо, чтобы составитель элементарного руководства по геометрии отдельно изложил начала науки, отдельно – следствия из этих начал, и при этом не отдавал отчёта о началах [45], но отдавал – о следующем из начал. Ведь ни одна наука не доказывает своих начал и не производит отчёта о них, но относится к ним как к самодостоверным, так что они для неё очевиднее следствий. И эти она рассматривает сами по себе, а те – через эти. Ведь и исследователь природы ведет свои рассуждения исходя из определённого начала, а именно из о предположения о существовании движения; так же поступает и врач, и каждый в другой науке или искусстве. Но тот, кто смешивает начала и то, что из начал, нарушает всё знание и соединяет то, что никак подходит друг к другу [46]. Ведь начало и то, что из него, по природе отделены друг от друга.

Прежде всего, как я сказал, надо развести [76] начала и следствия из начал, что Евклид и делает в каждой книге, каждый раз излагая общие начала этой науки. Эти общие начала он делит на предположения, постулаты и аксиомы. Все это отличается одно от другого, так что не одно и то же аксиома, постулат и предположение, как где-то говорит вдохновенный Аристотель [47]. Когда и учащемуся известно, и само по себе до-

[45] Платон, *Государство* 510cd.
[46] Платон, *Федон* 101e.
[47] Аристотель, *Вторая аналитика* 76a31–77a4.

стоверно то, что включается в порядок начал, то это – аксиома; к примеру, что равные одному и тому же равны между собой. Когда же слушатель не воспринимает сказанное как самодостоверное, но полагает его таковым и соглашается с принятым, то это – предположение; ведь мы без обучения, по общему понятию не знаем, что круг – это именно такая фигура, но услышав это, соглашаемся без доказательства. А когда сказанное неизвестно, и оно принимается, хотя учащийся с этим не согласен, тогда, говорит он, мы называем это постулатом, например, что все прямые углы равны[48]. Однако некоторые трудятся над доказательством иных постулатов, поскольку ничто не может быть принято само по себе[49]. Так по указанию Аристотеля разделяются [77] аксиома, постулат и предположение. Однако часто все это вместе называют предположениями, а стоики считают аксиомой всякое простое утверждение[50], так что для них предположения суть аксиомы, а для других аксиомы суть предположения.

И опять, то, что следует за началами, делится на задачи и теоремы, и первые охватывают возникновение фигур, их разделение, отнятие или прибавление, и в целом – те действия, которые с ними производятся; а вторые указывают существенные свойства каждой фигуры. Ведь как произведение причастно научной теории, так и теория включает в себя задачи по аналогии с производством. Но уже некоторые из древних,

[48] Это, конечно же, грубая подгонка принятых в геометрии терминов под текст Аристотеля из *Второй аналитики*, в котором эти термины употреблялись совсем в другом значении: ведь трудно представить себе кого-то, кто не согласен с тем, что все прямые углы равны.

[49] О доказательствах четвёртого и пятого постулатов см. 191.23 и далее.

[50] См. Диоген Лаэрций VII, 65; SVF II, 62–72.

и таковы последователи Спевсиппа[51] и Амфинома[52], считали, что всё следует называть теоремами, поскольку теоретическим наукам более приличествуют теоремы, нежели задачи, в особенности когда они рассуждают о вечном. И поскольку в вечном нет возникновения, там нет и задач, предполагающих возникновение и создание того, [78] что прежде не существовало, например, составление равностороннего треугольника, или построение квадрата на данной прямой, или проведение прямой к данной точке. Поэтому они предпочитают говорить, что всё это существует, а возникновение этого мы рассматриваем не созидательно, а познавательно, беря вечно сущее как возникающее; поэтому нам следует говорить, что всё берётся в качестве теорем, а не в качестве задач. Но другие, напротив, считают правильным всё называть задачами, и таковы математики из круга Менехма, причем само предложенное они считают двояким: либо когда находится искомое, либо когда, получив нечто определённое, мы смотрим, чем оно является, или каково оно, или что с ним произошло, или как оно относится к другому. И надо сказать, что правы и те, и другие: и сторонники Спевсиппа – потому что задачи геометрии отличаются от задач механики, ибо те являются чувственными и связанными с возникновением и всяческими изменениями; и сторонники Менехма – потому что решение задач невозможно без перехода в материю. Я говорю здесь об умопостигаемой материи. Когда логосы переходят в неё и её формируют, уместно говорить о возникновении. Ведь именно движение нашей мысли и выдвижение содержащихся в ней логосов мы называем возникновением фигур в воображении и действиями над ними. Именно в воображении производятся построения, рассечения, установ-

[51] Племянник Платона и первый схоларх Академии.
[52] О нём более ничего не известно; см. также 202.11, 220.9, 254.4.

ления, приложения, прибавления и отнятия, тогда как в мысли [79] всё это пребывает неподвижно без возникновения и какой-либо перемены.

Таким образом, в геометрии есть и задачи и теоремы, но поскольку здесь преобладает теория, тогда как в механике – созидание, здесь все задачи причастны теории, но не наоборот: ведь доказательства в целом являются делом теории. А всё, что идёт в геометрии за началами, получается посредством доказательства, так что теоремы будут более общими. И не все теоремы нуждаются в задачах, но есть и такие, которые доказывают искомое из самих себя. Но те, кто отделяет теорему от задачи, говорят, что всякая задача допускает о свойственной ей материи каждый из двух противоположных отличительных признаков, а всякая теорема хотя и допускает отличительный признак, но не допускает противоположного ему. Их материей я называю тот род, о котором ведётся исследование, например, треугольник, квадрат или круг, а отличительным признаком – существенный признак, например, равное, или деление, или положение, и тому подобное. Поэтому когда предлагается вписать равносторонний треугольник в круг [53], речь идет о задаче, потому что можно вписать и неравносторонний. И опять, когда на данной ограниченной прямой нужно построить равносторонний треугольник [54], это тоже задача, потому что можно построить и неравносторонний. Но когда утверждается, что углы при основании равнобедренного треугольника равны [55], следует говорить о теореме, [80] потому что углы при основании равнобедренного треугольника не могут быть неравными. Поэтому предложить в качестве задачи построить в полукруге прямой угол – значит

[53] Предложение IV.2.
[54] Предложение I.1.
[55] Предложение I.5.

показать свою неосведомленность в геометрии: ведь всякий угол в полукруге будет прямым [56]. И то, чему свойствен общий признак, сопутствующий всей материи, следует называть теоремой, а когда он не всеобщий и не сопутствует всякому подлежащему, это следует считать задачей. Разделить пополам ограниченную прямую – можно разделить и на неравные; разделить пополам любой прямолинейный угол – возможно деление и на неравные; на данной прямой начертить квадрат – можно и не квадрат; и всё такого рода надо отнести к задачам.

А круг Зенодота, принимающего учение Энопида, но учившегося у Андрона [57], отличает теорему от задачи так: теорема исследует, каков отличительный признак соответствующей ей материи, а задача – каково некое сущее. Исходя из этого, последователи Посидония [58] определяют теорему как предложение, в котором исследуется, существует нечто или нет; а задачу – как предложение, в котором исследуется, чем нечто является и каково оно. И теорему следует оформлять как утвердительное предложение: к примеру, «две стороны треугольника больше третьей», или «углы при основании равнобедренного треугольника равны»; а задачу – как вопросительное, например: «можно ли [81] на данной прямой построить треугольник?» Ведь это разное – просто и без ограничений исследовать, можно ли из данной точки к данной прямой провести перпендикуляр, или же рассматривать, что такое перпендикуляр.

То, что между задачей и теоремой имеется различие, ясно из сказанного выше; а то, что и в *Началах* Евклида есть и зада-

[56] Предложение III.31.

[57] Зенодот и Андрон известны только из этого текста.

[58] Посидоний из Апамеи – глава школы стоиков, существовавшей на Родосе во II в. до н. э. Занимался астрономией и математической географией. Прокл ссылается на него неоднократно: 143.8, 170.13, 176.6, 200.2, 216.20, 217.24.

чи, и теоремы, станет ясно из того, что он сам в конце каждого доказательства в одних случаях прибавляет «что и требовалось получить», а в других – «что и требовалось показать», что служит характеристикой теорем, хотя, как уже сказано, доказательство имеется и в задачах. Но там доказательство проводится ради возникающего, ведь мы применяем доказательство, чтобы показать, что построено предложенное; а здесь оно важно само по себе, поскольку может прояснить природу искомого. И ты найдёшь, что Евклид в одних случаях переплетает теоремы и задачи и пользуется ими по частям, как в первой книге; а в других преобладает что-то одно: так, четвертая книга целиком состоит из задач, а пятая из теорем. И об этом мы сказали достаточно.

Глава 10. Цель первой книги

А теперь, определив цель первой книги и уяснив её разделение, займёмся её определениями. Итак, назначение этой книги – преподать начала теории прямолинейных фигур. [82] Ведь хотя круг и занятия кругами по природе лучше сущности прямолинейных фигур и знания о них, но нам пока лучше подходит это наставление, ведь мы ещё не достигли совершенства и только пытаемся переводить мысль от ощущаемого к умопостигаемому. Ведь чувственно воспринимаемому соответствуют прямолинейные фигуры, а умопостигаемому – круг, потому что простое, однообразное и определённое соответствует природе сущих, а разнообразное и неопределённо возрастающее по количеству охватывающих сторон отличает ощущаемое. А потому в этой книге преподаны простейшие и изначальные прямолинейные фигуры, – я говорю о треугольнике и параллелограмме. Ведь их род охватывает и причины элементов, а именно равнобедренный и неравносторонний треугольники, и то, что их них составлено, – равносторонний треугольник и

квадрат, из которых уже составляются фигуры четырёх элементов [59]. Поэтому мы найдем в первой книге построение равностороннего треугольника и квадрата, первого – на данной прямой, второго – от данной. А равносторонний треугольник есть непосредственная причина трех элементов – огня, воздуха и воды, тогда как квадрат – земли. Тем самым цель первой книги [83] связана со всем сочинением и направлена к целостной теории космических элементов. И она даёт учащимся науку об элементах прямолинейных фигур, показывая красоту первых начал в их строгой связи.

Глава 11. Деление первой книги

А делится эта книга на три больших раздела. Первый из них показывает возникновение треугольников и их особенности в отношении углов и сторон, а также производит их взаимное сравнение и рассматривает каждый сам по себе. Взяв один треугольник, он рассматривает то углы сообразно сторонам, то стороны сообразно углам, в их равенстве и неравенстве; и взяв два, он опять разными способами отыскивает то же самое. Второй раздел содержит теорию параллелограммов, описывает свойства параллельных и возникновение параллелограммов, а также доказывает их свойства. Третий раздел показывает общность между треугольниками и параллелограммами в их свойствах и сравнивает их между собой. Когда треугольники или параллелограммы находятся на одном или на равных основаниях, доказывается, что они обладают теми же самыми свойствами; рассматриваются обе фигуры [84] на одном осно-

[59] Платон, *Тимей* 53c–55c. Здесь элементы – это четыре правильных многоугольника, из которых, по Платону, состоят четыре стихии телесного мира: огонь, воздух, вода, земля.

вании; показывается, как построить параллелограмм, равный треугольнику; наконец, говорится о квадратах, построенных на сторонах прямоугольного треугольника, в каком отношении сторона, стягивающая прямой угол, находится к охватывающим его сторонам. Вот примерное устройство первой книги *Начал* и её разделение.

Глава 12. Обращение к читателю

Приступая к началу детального изучения, мы хотим предупредить читателя, чтобы он не требовал от нас того, о чём говорили наши предшественники: лемм, частных случаев и тому подобного. Мы этим пресыщены и будем касаться его редко. Но о том, что имеет дело с теорией и направляет нас к философии в целом, мы будем постоянно напоминать, соревнуясь с пифагорейцами, у которых было такое изречение: «фигура и шаг, а не фигура и три обола». А объясняется оно так: надо заниматься той геометрией, которая с каждой теоремой делает шаг на пути к вершинам и подымает душу ввысь, не позволяя ей опускаться к ощущаемому и применять геометрию к обычным нуждам смертных, в погоне за которыми забывают о бегстве отсюда.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

[85] 1. Точка есть то, у чего нет частей.

Когда наш геометр восходит от более сложных вещей к более простым, он переходит от трижды протяжённого к ограничивающей его поверхности, от поверхности – к её границе, то есть к линии, от линии – к лишённой всякого протяжения точке; и это много раз сказано и всячески объяснено. Из-за своей простоты эти границы обычно считаются более значимыми, нежели то, что имеет сложную природу, хотя зачастую кажется, что они существуют лишь по сопричастности к тому, что ими ограничено; поэтому нам надо решить, в каком из родов сущего их следует рассматривать.

И я утверждаю, что в бестелесном, имеющем основу в обособленных логосах и существующем в самостоятельных видах, простое всегда предшествует сложному. Поэтому и в уме, и в срединном [86] миропорядке, и в душах [1], и в одухотворяющей тела природе ограничивающее по своей сути превосходит ограниченное, будучи в большей степени неделимым, однообразным и начальственным; ведь среди нематериальных видов единое совершеннее множества, не имеющее частей совершеннее всего протяжённого, и ограничивающее совершеннее того, что получает свою границу от другого.

[1] О промежуточном положении душ и их жизнетворной силе см. Прокл, *Начала теологии*, 188–190.

С другой стороны, у того, что нуждается в материи, основывается на ином, отделяется от своей сущности, отходит от основы и обладает только внешним единством, логосы будут в большей мере сложными, а не простыми. И в том, что подобно воображению и материи воображаемых фигур, равно как и в ощущаемом и порождённом природой, преобладают логосы ограниченного, а логосы ограничивающего производны и эпизодичны. Чтобы трижды протяжённое не простирало свою величину в бесконечность в мысли и в восприятии, оно со всех сторон ограничено поверхностями; и плоскость тоже не простирается неограниченно, но линия охватывает её и определяет её порождение; и точка делает то же самое с линией, поскольку сложное основано на простом.

И ясно также, что в отделённых видах логосы границ пребывают в себе, а не в том, что ограничено, и служат неподвижной основой для порождения вторичного. Но в том, что не отделено от материи, они передаются ограниченному, [87] утверждаясь в нём, становясь его частью и претерпевая худшее. Поэтому здесь не имеющее частей причастно делимым сущностям, и не имеющее ширины – имеющим её; и границы не могут сохранять своей простоты и беспримесности, но порождают предметы, соединённые в ином. Материя загрязняет их точность, и логос плоскости делается имеющим глубину, логос линии размывает свою одномерную протяжённость и делается повсюду делимым, а логос точки становится схожим по виду с телом и раздаётся вместе с тем, что им ограничено. Ведь вливаясь в материю (из размышления – в умопостигаемую, а из природы – в ощущаемую), они наполняются субстратом и расходуют свою простоту в соединении и разделении чужого. Но если в уме и в душе все вещи не имеют частей и размеров, как они становятся делимыми в материи по её природе? Не потому ли, что среди нематериальных видов установлен порядок первых, средних и последних; и одни виды в большей степени од-

нообразны, а другие множественны; и одни удерживают свои возможности в себе, а другие стремятся разделить их; и одни относятся к пределу, а другие к беспредельному? Ведь хотя всё причастно этим двум [88] началам, но одно более склоняется к одному, а другое – к другому. Поэтому там точка полностью лишена частей, а здесь, хотя её основой и служит предел, она содержит в себе скрытые возможности беспредельного, благодаря которым она порождает все протяжения. И последовательность всех протяжений[2] не раскрывает всех безграничных возможностей. А тело с его логосом более причастно природе беспредельного, ведь оно ограничено со всех сторон и бесконечно делимо по всем направлениям. Прочие же виды находятся между крайними, в большей степени склоняясь или к пределу, или к беспредельному. Они и являются ограниченными, и служат границами: поскольку они могут ограничивать, они основываются на пределе, а поскольку они принимают границы от другого, они причастны беспредельному.

Точка, будучи пределом, сохраняет своё присутствие во всём, что ей может быть причастно. И она потаённо владеет беспредельным и содержится повсюду в ограниченном, теснясь там до бесконечности. Возможность там – это неограниченное порождение расстояний, а потому в возможности она рождается в причастном ей. И я утверждаю, что беспредельность там, среди умопостигаемого, служит первопричиной и порождающей способностью целого, причём в нематериальном она несовершенна и становится всем только в возможности. Потому и сказано, что вещи, не имеющие частей из-за своей простоты, занимают наивысшее положение среди начал, сохраняя особенности своей природы в причастных им видах, [89] но делают это заметно хуже сложных логосов. Ведь мате-

[2] Т. е. поочерёдное появление длины, ширины, глубины.

рия имеет в сложном более определённую долю, и подходит к нему в большей мере, чем к простым сущностям. Поэтому, хотя в неё спускаются следы самых высоких начал, всё же те, которые она получает из вторых и третьих ступеней, гораздо более заметны, и она более причастна телесным причинам, нежели плоскостным, а этим более, чем виду линий, этим же последним больше, чем все их ограничивающей и соединяющей точке. Ведь логос точки возглавляет весь этот ряд, и он сводит воедино всё, что делимо на части, соединяя и ограничивая их последовательность, проходя через всё и охватывая его отовсюду. Потому и в образах разное ограничено разным, но всё – точкой. И нам не следует думать, как это делали стоики, что эти пределы – я говорю о пределах тел – существуют лишь в чистом мышлении. Чтобы понять, что такие природы исконно содержатся в сущностях и ими управляют производящие логосы, нам стоит только посмотреть на целостный космос, его окружности, центры этих окружностей и проходящие через всё в целом оси. Ведь центры существуют на деле, удерживая вместе сферы, соединяя их расстояния, сжимая и смыкая в себе их возможности; и оси закручивают их и обводят вокруг себя, сами оставаясь неподвижными, так что сферы кружатся вокруг них. И полюсы [90] сфер, ограничивающие оси и скрепляющие собой обороты целого, – разве они не делают очевидным то, что точки обладают творческими и всеохватными возможностями и в качестве вождей обеспечивают соединение разнесённого целого и его непрерывное движение? Поэтому Платон говорит, что субстанция этих осей тверда, как адамант, что сущность их неизменна, вечна и неколебима, и что веретено в своей целокупности вращается вокруг себя и обводится единым хороводом [3]. Другие, более тайные учения, гласят,

[3] Платон, *Государство* 616с и *Тимей* 40с.

что демиург стоит над космосом на полюсах и божественной любовью вращает космос под собой[4]. А пифагорейцы утверждают, что полюс следует называть «печатью Реи», поскольку животворящее божество распространяет через него на вселенную свою неизрекаемую и деятельную способность, и «острогом Зевса», поскольку Зевс установил свою стражу над лоном космоса, в самой его середине. Ведь центр неподвижен, и вселенная обладает неколебимым миропорядком и непрестанным вращением, и всё сохраняет свой неизменный порядок. Повелевающие полюсами боги сводят разделённое и объединяют распределённые множественные способности, поскольку оси вынуждают круги [91] непрестанно вращаться. От себя же я добавлю, что центры и полюсы всех сфер служат символами примирительных богов, словно непознаваемые и единственные признаки; оси отпечатывают сохранение миропорядка в целом, объемля собой порядок и целостность периодов, а там это делают умопостигаемые сущности; и сами сферы служат образами совершенных богов, соединяя концы и начала, превосходя все фигуры простотой, подобием и совершенством.

Мы так много говорили об этом, чтобы показать, какими возможностями в космосе обладают не имеющие частей сущности и пределы вообще, и что своим величием они подобны первым и начальственным причинам космического порядка. Ведь центры и полюса – это не то же самое, что пределы ограниченных вещей, но они обладают действенной основой, совершенным в себе бытием и возможностями, распространёнными на всё делимое.

Большинство людей, наблюдая за несовершенством пределов ограниченного, имеют неясное представление об их бытии; и некоторые говорят, что они существуют только в отвлечённой

[4] См. Прокл, *Начала теологии*, 196, 204–211.

от ощущаемого мысли, другие – что у них нет другого существования, кроме как в нашем мышлении. Однако всеобщие виды находятся и в умопостигаемой природе, и в миропорядке душ, и в природе, и, наконец, в телах. Отметим, какое место они занимают в порядке порождения [92] сущих. Все они изначально существуют в уме, но – как неделимые и единообразные, ибо они основаны на одном виде, которым они тайно и неделимо обладают по логосу точки. Все они пребывают и в душах, но уже под видом линии, и поэтому в *Тимее* душа составляется из прямых и окружностей, ведь каждый круг – это только одна линия. Все они пребывают и в природе, но уже по логосу плоскости. Поэтому Платон поясняет, что природные логосы служат основой для тел при посредстве плоскостей [5]; и разложение тел на плоскости приводит нас к непосредственной причине явлений. Все они пребывают и в телах, но здесь они приобретают телесный вид в согласии с делимой природой тел, поскольку на них основаны все виды. Следовательно, все они существуют во всём, и каждый проявляется в своём порядке и изменяется в соответствии с преобладающей способностью, и точка всюду неделима и своей простотой отличается от делимых вещей, но при понижении бытия она приобретает сущность этих делимых. Она то превосходит их своей причиной, то сонаправлена с ними; а иногда ей выпадает жребий пребывать среди них и испить от разделения последних, ослабив свою обычную неделимость. И как единица (μονάς) то порождает числа, то служит материей чисел, [93] и всегда так или иначе является началом, но никогда – числом, так и точка иногда служит основой для величин, а иногда – их началом и порождающей причиной.

Но только ли точка не имеет частей? Или таковы и «теперь» для времени и единица для чисел? Философ, рассуждающий

[5] Платон, *Тимей* 53c–55c.

обо всём сущем, должен в своей теории так или иначе коснуться всего делимого, равно как и всего неделимого, служащего начальной основой для делимого. А тот, кто занимается той или иной отдельной наукой (ἐπιστήμη), исходит в своей теории из ограниченных начал, восходя лишь до них и не занимаясь втуне порядками сущего; и он применяет, рассматривает и передаёт только природу неделимого, и первым делом разделяет начала и рассматривает те простейшие, которые служат основой для его науки. В геометрической материи не имеет частей только точка, а в числовой – единица; и определение (λόγος) точки, несовершенное для другого случая, совершенно для обстоятельств этой науки. Так и врач говорит, что элементами тела являются огонь, вода и тому подобное, и он производит разложение вплоть до этого уровня, тогда как физик достигает более простых элементов. Первый определяет элемент как простейшее для ощущения, второй – как простейшее для рассуждения, и каждый прав для своей науки. [94] А поэтому мы не должны считать определение точки ошибочным или несовершенным. Ведь для геометрической материи и её начал оно вполне подходит. Наш геометр ясно говорит, что «для меня неделимое есть точка и начало, и для меня нет ничего простого, кроме неё», – и именно так нам его следует понимать. Отрицая наличие у неё частей, Евклид показывает нам, что она служит началом всей природы, подлежащей нашему рассмотрению. Отрицательные определения (ἀποφατικοὶ λόγοι) характерны для начал, как учит нас Парменид, устанавливая первую и последнюю причину через одни только отрицания[6]. Всякое начало имеет иную сущность, нежели зависящее от него, и отрицание последнего проясняет для нас особенность первого. И через такой путь обучения познаётся сама причина, а не то, что этой причине подчинено.

[6] Платон, *Парменид* 137c–142b.

Кто-то может равно указать на такую трудность: как геометр может созерцать в воображении не имеющую частей точку, если воображение всегда имеет дело с оформленным и делимым? Ведь воображение по природе приемлет не только суждения разума, но и отражения мысленных и божественных видов, простираясь от форм до бесформенного и от фигур до бесфигурного. На эту трудность мы отвечаем, что движение воображения не является по своему виду ни только делимым, ни только неделимым, [95] но оно идёт от неделимого к делимому и от бесформенного к оформленному. Ведь если оно только делимо, в нём невозможно сохранять многочисленные оттиски видов, поскольку замещающие будут размывать то, что было прежде, – как и тело не может в одно время и в одном месте иметь многие формы, но вторые по порядку будут закрывать собой первые. А если оно только неделимо, разум не будет подчинён душе, которая всё созерцает неделимым, и он не сможет производить формирующих действий. Ведь необходимо, чтобы они начинались в неделимом, исходили из него и продвигались к каждому познаваемому виду, доставляя ему форму, фигуру и протяжение. И если оно имеет такую природу и в нём наличествует неделимость, тем самым оно имеет названную сущность точки. Но в нём будет схвачен также и вид линии. Обладая двойным характером делимого и неделимого, воображение содержит и неделимую точку, и делимые расстояния.

Поскольку пифагорейцы определили точку как единицу, имеющую положение, нам надо исследовать, каков смысл сказанного ими. Всякому ясно, что числа чище и нематериальнее величин, и начало чисел проще начала величин. Но когда они говорят, что единица имеет положение, [96] я думаю, что они считают единицу и число – я говорю о единичном числе – сущими в мышлении. Поэтому каждое число, будь то пять или семь, возникает в каждой душе не как многое, будучи свободным от привходящих фигур или форм. А точка вбрасывается в

воображение, как бы рождаясь в некотором месте, и воплощается в мысленной материи. Так что единица не имеет положения, ибо она нематериальна, и у неё нет никакого протяжения и места; а точка имеет положение, ибо она представляется воплощённой в лоне воображения. И благодаря общности с началами единица проще точки (στιγμή)[7]. А точка, как имеющая положение, следует за единицей, и сделанные при этом добавления завершают ослабление бестелесности.

2. Линия – длина без ширины.

Линия находится на втором месте, как первое и простейшее протяжение, которое наш геометр называет длиной, добавляя «без ширины»[8], потому что линия относится к поверхности как начало. О точке, как о начале всех величин через единицу, он учит нас только через отрицание, а о линии – и через утверждение, и через отрицание. Будучи длиной, она вышла за неделимость точки; [97] но, не имея ширины, она чиста от других протяжений. «Без ширины» – это и «без глубины», но не наоборот. Говоря «без ширины», он подразумевает и «без глубины», и он потому не добавляет «без глубины», что это входит в понятие «без ширины».

Линия определяется и другими способами. Одни говорят, что это течение точки[9], другие – что это величина с одним протяжением[10]. Последнее определение в совершенстве обозначает сущность линии, но когда говорят, что она представляет собой течение точки, её объясняют через порождающую при-

[7] Собств. «укол» – другое название для точки, отличное от принятого у Евклида слова σημεῖον.
[8] Ср. Аристотель, *Топика* 143b11.
[9] Ср. Аристотель, *О душе* 409a4.
[10] Ср. Аристотель, *Метафизика* 1020a11.

чину, а это годится не для всякой линии, но только для материальной [11]. Бытие такой линии основано на неделимой точке, каковая служит причиной всего делимого. А течение означает продвижение и порождающую способность, простирающуюся по всем направлениям без ослабления, оставаясь собой, и являющуюся сутью всего делимого.

Всё это общеизвестно. Мы же вспомним здесь об учении пифагорейцев, согласно которому точка аналогична единице, линия – двойке, поверхность – тройке, тело – четвёрке. С другой стороны, взяв их как протяжения, в основе линии мы найдём единицу, в основе поверхности – двойку, в основе тела – тройку; и Аристотель говорит, что тело завершается в тройке [12]. Не удивительно, что точка из-за своей неделимости исходно связана с единицей; а сущности, следующие за точкой, основаны на числах, следующих за единицей, [98] и сохраняют к точке то же отношение, что и числа к единице; при этом каждая из них причастна стоящей перед ней, и имеет такое же отношение к следующей за ним, что и её предшествующее – к ней самой. Я утверждаю, что линия для точки будет двойкой, а для поверхности – единицей; и поверхность для точки и линии будет тройкой, а для тела – двойкой; и тело для точки будет четвёркой, а для линии – тройкой. Оба порядка имеют своё объяснение, но предложенный пифагорейцами ближе к началам, как пришедший свыше и сообразный с природой. И точка двойственна, ибо она существует и сама по себе, и в линии. Будучи пределом и единством, она не имеет ни целого, ни частей, подражая вершине сущего и благодаря этому оказываясь аналогом единицы. Ведь и оракул говорит о «первой и отеческой единице». Линия же – первое, что имеет часть и целое; и она по сво-

[11] В тексте, по-видимому, оговорка: ἄυλον.
[12] Аристотель, *О небе* 268a8.

ей сути является и единицей, как имеющая одно протяжение, и двойкой – через продвижение. Будучи неограниченной, она причастна неопределённой двойке, а будучи ограниченной, она имеет два предела, здесь и там; поэтому она подражает целостности, [99] а в порядке бытия она и длит единицу, и порождает двойку. Ведь она вытягивается в длину, и её одна протяжённость причастна двойке. Поверхность же по своей сути – это и тройка, и двойка; будучи хранилищем первых фигур и впервые обладая формой и видом, она как тройка ограничивает первую сущность и природу, а как двойка – разделяет их. А тело, протяжённое трижды, определяется четвёркой, обнаруживающей как охват всех логосов в идеальном миропорядке, так и различение телесного космоса, и разделение целого натрое происходит через порождающую и женскую четвертичную особенность. Подробнее это будет рассмотрено ниже. Поскольку линия идёт второй и получает существование при первом движении от неделимого, учение пифагорейцев называет её двоичной. То, что точка следует за единицей, линия – за двойкой, и поверхность – за тройкой, Парменид поясняет, сперва отрицая множественность единого, а затем и целого [13]. Если многое предшествует целому, то и число предшествует непрерывному, и двойка – линии, и единица – точке. Ведь не называют «многим» единицу, порождающую [100] многое *** [14], и о нём говорят как об имеющем части. Вот что может быть сказано о линии, исходя их теоретических намерений.

Нам следует также рассмотреть сказанное последователями Аполлония о том, что понятие линии мы приобретаем броском мысли (ἐπιβολή) [15], когда измеряем одну только длину, как

[13] Платон, *Парменид* 137c.

[14] Лакуна в тексте.

[15] Термин из эпикурейского учения о критерии; по сути дела то же, что и интеллектуальная интуиция в новоевропейском понимании.

в случае дороги или стены. Ведь мы при этом не берём в расчёт ширину, но учитываем только длину. И если мы измеряем площадь, мы смотрим только на поверхность, а если водоём – на тело. В последнем случае мы берём все протяжения совместно и объявляем, каковы измерения водоёма – его длина, ширина и глубина. А чувственное восприятие линии мы получаем, глядя на разделение освещённого и затенённого места, будь то на луне или на земле. Ведь среднее между ними непротяжённо по ширине, но имеет длину, вытянувшись вдоль света и тени.

[101] 3. Края линии – точки.

Всякое сложное получает свою границу от простого, и всякое делимое – от неделимого. Образы этого представлены в началах математики. Ведь когда наш автор говорит, что линия ограничена точками, ясно, что он производит её неограниченно, не имея в ней самой никакого предела. Так что как двойка ограничена единицами и ограничивает свой неудержимый порыв под их властью, так и линия ограничена точками. Будучи двувидной, она двойственным образом причастна точке, обладающей логосом единицы. В воображаемом и ощущаемом сами точки на линии ограничивают эту линию, но в нематериальном исходно существует неделимый логос точки. Выходя отсюда, он первым делом распространяет себя, движет и течёт до бесконечности, и, подражая неопределённой двойке, он утверждает собственное начало, объединяя и охватывая его повсюду. Поэтому он одновременно безграничен и ограничен: безграничен в своём продвижении, ограничен по причастности ограничивающей причине. Ведь в своём продвижении он подчинён ей и ограничен её единством. И среди образов точки те, [102] которые служат началом и концом линии, названы её границами. Там предел превосходит то, что им ограничено, здесь же он двойственен: ведь он существует в ограниченном. И это даёт удивительное показание в пользу того, что виды, пребыва-

ющие в себе, в качестве причин предшествуют тем, которые им причастны; но, вручая им себя, они заимствуют от них некоторые особенности, становясь вместе с ними множественными и делимыми на части, и удовлетворяясь делением своей основы.

О линии надо сказать заранее, что наш геометр пользуется ей трояко. Он берёт её то как ограниченную с обеих сторон, как в задаче «на данной ограниченной линии построить равносторонний треугольник» [16], то как неограниченную с одной и ограниченную с другой стороны, как в задаче «построить треугольник из трёх прямых, равных трём данным прямым» (ведь в построении он говорит «возьму прямую, ограниченную с одной и неограниченную с другой стороны») [17], <то как неограниченную с обеих сторон, как в задаче «на данную неограниченную линию опустить перпендикуляр из точки вне неё»>[18] .Так что линию он берёт трояко.

Будет неправильно упустить из виду ещё один важный вопрос: когда о точках говорят как о границах линии, [103] и о какой линии здесь идёт речь? Границами неограниченной линии они быть не могут, но и всякой ограниченной тоже. Ибо имеется ограниченная линия, граница которой – не точка. Такова круговая линия, замкнутая на себя и не пользующаяся точками как пределами, в отличие от прямой; таков и эллипс. Ведь не всегда линии нужно быть ограниченной. А если взять дугу окружности или часть линии эллипса, то они будут ограничены точками. Кругу и эллипсу присущи и другие особенности, когда они берутся не только как линии, но и как границы фигур. Взятые как линии, они ограничены точками; но в качестве того, что порождает фигуры, они будут замкнуты на себя. Предста-

[16] Предложение I.1.

[17] Предложение I.22.

[18] Лакуна в тексте заполнена предложением I.12.

вив их вычерчиваемыми, мы найдём, что они ограничены точками; но взяв их уже начерченными, когда начало сомкнулось с концом, мы не сможем помыслить их пределы.

4. Прямая линия есть та, которая равно лежит на всех своих точках.

Платон полагает два вида линий простейшими и изначальными, и это прямая и [104] окружность; а все другие он выводит из смешения этих двух, говоря о спиралевидных линиях, будь то плоских или на поверхности тел, и о кривых линиях, которые получаются рассечением тел. Согласно Платону, точка, если можно так выразиться, служит образом единого. Ведь единое тоже не имеет частей, как он показал в *Пармениде* [19]. Поскольку имеются три ипостаси ниже единого – предел, беспредельное и смешанное, – на них основаны виды линий, углов и фигур. Аналогами предела на плоскости служат окружность, круг и угол между окружностями, а среди тел – сфера. Беспредельному всюду соответствует прямое, и его можно вообразить для всех этих случаев. Смешанному же соответствует смешанное: ведь имеются смешанные линии, и таковы спирали; и углы, каковы полукруговой и роговидный [20]; и фигуры, каковы сечения и арки; и тела, а именно конусы, цилиндры и подобные им. Так что предел, беспредельное и смешанное имеются повсюду. Суждение Аристотеля совпадает с суждением Платона. Он говорит, что виды линии – это прямая, окружность и их смешение [21]. И движений тоже три: прямое, круговое и смешанное.

[19] Платон, *Парменид* 145b.

[20] Полукруговой угол – угол между окружностью и диаметром круга; роговидный угол – угол между окружностью и касательной к ней.

[21] Аристотель, *О небе* 268b17; *Физика* 261b29.

Некоторые оспаривают это разделение и утверждают, что имеются не две простые линии, [105] а три, добавляя к ним цилиндрическую спираль, которая получается, когда прямая равномерно движется по поверхности цилиндра, а точка – по прямой. И так возникает спираль, во всякой своей части подобочастно (ὁμοιομερῶς)[22] совпадающая с собой, как это показал Аполлоний в трактате *Об улитках*. Это свойство имеется только у этой спирали. Ведь части плоской спирали неподобны между собой, и у спиралей на конусах или сферах они неподобны тоже. Только цилиндрическая спираль подобочастна, как и прямая и круговая линии. А потому не имеются ли три простые линии, а не только две?

На эту трудность мы ответим, что такая спираль в самом деле будет подобочастной, как показал Аполлоний, но она не будет простой. Ведь быть подобочастным и простым – это не одно и тоже. Среди природных составов золото и серебро являются подобочастными, но не простыми. Ясно, что по своему происхождению цилиндрическая спираль смешана из простых линий. Ведь она получается движением прямой вокруг оси цилиндра и переносом точки вдоль этой прямой. Она получает существование от двух простых движений, так что является смешанной линией, а не простой. Ведь основанное на неподобных является не простым, но смешанным, и правильно говорит Гемин, [106] что и простая линия может быть получена из многих движений, однако не всякая такая линия будет смешанной, но лишь та, что возникла из неподобных движений. Представь себе квадрат; и пусть два движения с равными скоростями, одно по длине, другое по ширине, порождают диагональ, кото-

[22] Термин, восходящий к физике Анаксагора в изложении Аристотеля: подобочастными называются субстанции, все части которых устроены одинаково.

рая будет прямой. Однако эта прямая не будет смешанной: ведь она не произведена на свет простым движением отличной от неё линии, как это происходит в случае упомянутой цилиндрической спирали. Неверно также, что круговая линия получается смешением, если представить, как середина прямой линии, скользящей по сторонам прямого угла, описывает окружность. Здесь концы прямой движутся равномерно, описывая прямые [23], а середина – неравномерно, описывая окружность; другие же точки описывают эллипсы. Так круговая линия получается в результате неравномерного движения середины, и при этом прямая линия скользит по сторонам прямого угла, а не движется по своей природе. Но об этом достаточно.

Кто-то может считать, что хотя обе линии, прямая и окружность, являются простыми, но прямая всё же проще. Ведь в её понятии нет никакого неподобия, а у окружности различаются выпуклость и вогнутость. И понятие прямой не предполагает понятия окружности, тогда как окружность [107] предполагает прямую, если не через порождение, то через связь с центром. А что поделать, если кто-то говорит, что окружность основана на прямой? Ведь когда один конец прямой неподвижен, а другой движется, при этом описывается круг, центром которого служит неподвижный конец. Следует ли нам ответить, что круг описывает не прямая, но точка, обносимая вокруг середины? Прямая лишь определяет расстояние, а круговую линию задаёт точка в её круговом движении. И об этом тоже сказано достаточно.

Кажется, что окружность принадлежит к пределу, и к другим линиям она имеет такое же отношение, как и предел ко всему прочему: ведь из простых линий только она одна обра-

[23] Оба конца этой прямой двигаться равномерно в одно и то же время не могут.

зует фигуру. А прямая принадлежит к беспредельному, ибо её можно беспредельно продолжать. И как всё прочее образуется из предела и беспредельного, так и весь род смешанных линий – из окружности и прямой, будь то на плоскости или на поверхности тел. По этой причине и душа исходно содержит в своей сущности прямое и круговое, так что она может обозревать в космосе весь состав безграничного и всю природу ограниченного, основывая продвижение на прямой, а возвращение на окружности, [108] одной линией уводя их к множеству, а другой собирая в единство.

И такова не только душа, но также и основатель души (ὁ τὴν ψυχὴν ὑποστήσας), заложивший в неё обе эти способности в качестве прирождённых причин. Ведь «собрав воедино все начала, середины и концы, он ограничил всё это прямым путём, вращаясь вокруг согласно природе», как сказал Платон[24]. Он подходит ко всему со своим задуманным делом, и возвращается к себе, «пребывая в своей обычной природе», как говорит Тимей[25]. Прямая служит символом неизменного, неизогнутого, незапятнанного и непрестанного промысла, всемогущего и вездесущего; а окружность и кружение – это символы обращённой к себе и сосредоточенной в себе деятельности, и она управляет целым с помощью мыслимого предела. Демиургический ум утвердил в себе оба эти начала, прямую и окружность, и вывел из себя две единицы: одна из них действует по окружности и совершенствует умопостигаемые сущности, а другая – по прямой, порождая ощущаемое. А поскольку [109] душа есть среднее между умопостигаемым и ощущаемым, то, соединяя мыслимые природы, она действует по кругу, а управляя ощущаемыми, она выводит свой промысел по прямой. И таким же

[24] Платон, *Законы* 716a.
[25] Платон, *Тимей* 42e.

образом подобие этих видов относится к сущему.

Определив прямую как сказано выше, Евклид поясняет, что только прямая имеет равные промежутки между своими точками. Ведь величина прямой определяется от одной до другой ограничивающей её точки. А это и значит «равно лежит на всех своих точках». Если же взять две точки на окружности или на какой-нибудь другой линии, то длина самой линии между этими точками будет больше расстояния между ними. И ясно, что таковы все линии, кроме прямой. И по общему понятию (κατὰ κοινὴν ἔννοιαν) идущие по прямой проходят только необходимое расстояние, а идущие не по прямой проходят больше необходимого.

А Платон определяет прямую линию как такую, у которой середина заслоняет края [26]. Это необходимо для того, что лежит на прямой, но не обязательно для окружностей или других расстояний. Поэтому астрономы говорят, [110] что Солнце затмевается, когда оно, Луна и наш глаз оказываются на одной прямой. Ведь тогда наш взгляд перехватывается Луной, которая оказалась между Солнцем и нами. И это свойство прямой равным образом показывает, что и в сущем, когда вещи происходят от своих причин, средние производят разделение сообщающихся краёв; а при возвращении они приводят к начальным причинам то, что от них отделено.

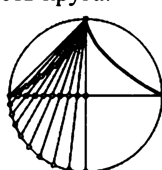
А Архимед определяет прямую линию как кратчайшую из всех, имеющих те же самые края [27]. Ведь определение Евклида говорит, что она равно лежит на своих точках; а потому она будет кратчайшей из всех, имеющих те же самые края. А если бы она не была кратчайшей, она не лежала бы равно между своими краями. И все другие определения прямой сводятся к

[26] Платон, *Парменид* 137е.
[27] Архимед, *О сфере и цилиндре*, I.

одному и тому же понятию: это самая натянутая линия между краями, и ни одна её часть не лежит выше или ниже плоскости, и все её подобные части прилажены друг к другу, и когда её края неподвижны, неподвижна и она сама, чего нет ни у какой другой однородной фигуры. Всё эти свойства прямой означают её простоту и то, что она служит кратчайшим путём от одного до другого конца. Это всё об определении прямой [111] линии.

Гемин первым делом разделяет линии на несоставные и составные, называя составной линией ту, которая образует угол на изломе. Затем он делит несоставные на производящие фигуру и простирающиеся в бесконечность. Он говорит, что фигуру производят круговые и эллиптические линии, а также циссоида[28]; а не производят фигуру сечения прямоугольного и тупоугольного конуса[29], конхоида[30], прямая, и все им подобные.

[28] Циссоида (от κισσός – «плющ») изобретена Диоклом (II в. до н. э.) для решения задачи удвоения куба. На рисунке здесь для каждой хорды, проведённой из верхней точки окружности, расстояние от лежащей на ней точки циссоиды до горизонтального диаметра равно расстоянию от горизонтального диаметра до нижней дуги окружности. Под «фигурой, которую производит циссоида», подразумевается лежащая ниже циссоиды часть круга.



[29] До Аполлония конические сечения мыслились как производимые плоскостью, перпендикулярной к одной из образующих конуса. Тем самым сечение прямоугольного конуса – это парабола, сечение тупоугольного конуса – гипербола, сечение остроугольного конуса – эллипс.

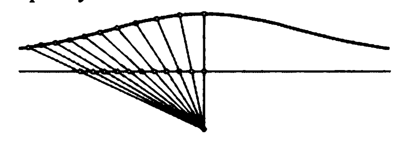
[30] Конхоида (от κόγχη – «улитка») изобретена Никомедом (III в. до н. э.) для выполнения построений, использующих так называемые вставки. На рисунке на каждой прямой, проведённой через нижнюю

А иным способом он делит несоставные линии на простые и смешанные. К простым из производящих фигуру относится круговая линия, а из беспредельных – прямая. Из смешанных одни будут плоскими, другие – телесными. Из плоских одни сходятся с собой, как циссоида, а другие простираются в бесконечность; а из телесных одни познаются через сечение тел, другие – как лежащие на телах. Так сферическая или коническая спираль лежит на теле, а конические или спирические сечения [31] образуются через сечение тел. Некоторые из этих сечений, в частности конические, были открыты Менехмом, о чём повествует Эратосфен: «конуса ты не секи, корня Менехма триад» [32]; другие – Персеем [33], который составил эпиграмму о своём [112] открытии:

> «Открыв в пяти сечениях три линии,
> Персей решил богам их посвятить».

Три сечения конуса – это парабола, гипербола и эллипс. Из спирических сечений одно связано, наподобие лошадиных

точку (полюс), расстояние от лежащей на ней точки конхоиды до ведущей горизонтальной прямой (линейки) равно одному и тому же фиксированному отрезку.



[31] Спирические сечения – сечения тора плоскостями, параллельными его оси. Упоминание о спирических сечениях в связи с классификацией линий имеется также в *Определениях* Герона, 74.1, 75.1.

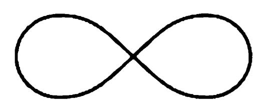
[32] См. Евтокий, *Комментарий к трактату Архимеда «О шаре и цилиндре»* 96.17.

[33] Этот Персей (II в. до н. э.) известен только по двум ссылкам у Прокла (см. также 356.12).

пут[34], другое широко посредине и утончается к концам, третье вытянуто и имеет перемычку посредине и расширения на концах. Другие смешанные линии неограниченны по количеству: ведь количество телесных фигур бесконечно, и их сечения многовидны. Ведь если прямая производит поверхность круговым движением, то это же делают и конические линии, и конхоиды, и сами окружности. И если такие тела рассекать всеми способами, то получатся многообразные виды линий.

Из линий на поверхности тел одни будут подобочастными, как цилиндрическая спираль, другие неподобочастными, и таковы все остальные. Из этих разделений получается, что имеются только три подобочастные линии: прямая, окружность и цилиндрическая спираль; причём две плоские – простые, одна телесная – смешанная. Доказательство этого предваряется леммой Гемина о том, что если [113] из точки к подобочастной линии проведены две прямые, образующие с ней равные углы, то и сами эти прямые равны между собой. Любознательные читатели найдут опущенное доказательство в его трудах, где излагается также порождение спирических линий, конхоид и циссоид. Мы изложили их названия и разделения, чтобы побудить одарённых учащихся к поиску, в настоящем же изложении мы сочли эти изыскания излишними, поскольку наш геометр объясняет нам только простые и изначальные линии: прямую в настоящем определении и окружность при обсуждении круга (ведь там он говорит, что линия, ограничивающая круг, есть окружность). Смешанных же линий он совсем не упоминает.

[34] Эта линия так и называется – гиппопеда (ἱπποπέδη). Как она выглядит, показано на рисунке.



Но ему известны смешанные углы, такие как полукруговые и роговидные, и смешанные плоские фигуры, сегменты и секторы, и тела, как конусы и цилиндры. Для каждого из этих родов он приводит по три вида, и только для линий два, прямую и окружность, считая, что в этом сочинении о простых началах надо рассматривать простые и важнейшие виды. А все остальные линии являются составными. Поэтому, следуя нашему геометру, мы завершаем разделение на этих простых линиях.

[114] 5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

За точкой и линией идёт поверхность, дважды протяжённая в длину и в ширину; а глубины у неё нет, так что по природе она проще того, что имеет три протяжения. И наш геометр после упоминания о двух протяжениях добавляет «только», поскольку у поверхности нет третьего протяжения. Это равносильно отрицанию глубины, так что он через отрицание отмечает здесь превосходную простоту поверхности в сравнении с телом (ибо такое добавление равносильно отрицанию), а через утверждение – её слабость в сравнении с предыдущими сущностями. Другие определяют её как границу тела, говоря по сути дела то же самое (ведь граница меньше ограниченного на одно протяжение), или как дважды протяжённую величину, и они иначе обозначают то же самое.

Говорят, что мы приобретаем понятие о поверхности, измеряя площади и определяя длину и ширину их границ; ощущением же мы воспринимаем его, глядя на тени, у которых, поскольку они не уходят под землю, нет глубины, а есть только длина и ширина. [115] Пифагорейцы говорили, что поверхность посвящена тройке, ведь все фигуры на ней имеют тройку своей первопричиной. Ибо круг, как начало окружностей, скрывает в себе тройку: центр, радиус, окружность. И треугольник, как

вожатый всех прямолинейных фигур, очевидно таков же: ведь он удерживается тройкой и формируется ей.

6. Края поверхности – линии.

После сказанного весьма правдоподобно, что всякое сущее, которое проще того, что следует прямо за ним, служит ему границей и краем. Душа ограничивает и завершает дело природы, и природа делает то же с движением тел, а ум, предшествующий им обеим, отмеряет круговращения души, а для жизни самого ума это выполняет единое, которое служит мерой всего. Точно так же и тело ограничено поверхностью, поверхность – линией, а линия – точкой, которая служит границей всего. В нематериальных видах и неделимых логосах линия, однообразная в своём продвижении, ограничивает и собирает разнообразное движение поверхности [116] и приводит её бесконечность к единству; тогда как в образах ограничивающее порождает ограниченное, тем самым придавая ему границу.

Если кто-нибудь спросит, как линии могут быть границами всех поверхностей, тогда как не все поверхности ограничены линиями (ведь поверхность сферы ограничена не линией, а сама собой), мы ответим ему, что взяв двояко протяжённую поверхность, мы обнаружим, что она ограничена линиями по длине и ширине; но, рассмотрев сферическую поверхность, формирующую себя и приобретающую дополнительное качество, мы увидим, что в ней начало соединено с концом, производя из двух пределов один, и это единство присуще ей лишь в возможности, но не на деле[35].

[35] Здесь Прокл по-видимому оговорился, поскольку у сферической поверхности «на деле» имеется один предел, и это она сама, – а «в возможности» их два, по причине её двухмерности.

7. Плоская поверхность есть та, которая равно лежит на всех своих линиях.

Древние философы по виду не различали плоскости (ἐπίπεδον) от поверхности (ἐπιφάνεια), но пользовались обоими этими названиями для дважды протяжённой величины. И божественный Платон говорил, что геометрия есть изучение плоскостей, в отличие от стереометрии [36], считая, что плоскость и поверхность – это одно и то же. Так же полагал и вдохновенный Аристотель [37]. Однако Евклид и его последователи считают поверхность родом, а плоскость видом, подобно линии [117] и прямой. По аналогии с прямой он определяет плоскость отдельно от поверхности. Ведь как о линии сказано, что она лежит в промежутке между двумя взятыми точками, так и плоскость равно занимает место между двумя прямыми. Это значит, что она равно лежит на всех своих линиях. Другие, подразумевая то же самое, говорили, что она натянута к краям; и ещё, что ко всем её частям прилаживается прямая. Говорят также, что это наименьшая из всех поверхностей с данными краями [38], и что её середина закрывает края, – и все эти определения можно перенести с прямой на плоскость, только сменив род. Ведь мы уже сказали, что прямизна, закруглённость и смешанность начинаются с линий и доходят до тел. И по аналогии они имеются и у поверхностей, и у тел. Так и в *Пармениде* сказано, что всякая фигура является прямой, округлой или смешанной [39]. И

[36] Платон, *Государство* 528d.

[37] Аристотель, *Категории* 5a3.

[38] При этом края сами должны лежать в одной плоскости, так что это определение не является действительным (в отличие от аналогичного определения прямой, где вовсе не надо было требовать заранее, чтобы края линии лежали на одной прямой).

[39] Платон, *Парменид* 145b.

если ты хочешь представить прямизну в поверхностях, возьми плоскость, к которой всюду прилаживается прямая; для округлости – сферическую поверхность, для смешения – цилиндр, конус или что-нибудь схожее с ними.

Но Гемин говорит, что нам следует различать способ, которым осуществляется смешение в так называемых смешанных линиях и смешанных поверхностях. Смешение в линиях не идёт ни через соположение (κατὰ σύνθεσιν), [118] ни через слияние (κατὰ κρᾶσιν) [40]. К примеру, спираль является смешанной, не имея ни прямой, ни круговой части, как при смешении через соположение; и при её рассечении не обнаруживается простых составляющих, как при слиянии, ведь они переплетены в ней вместе. Так что математик Феодор [41] ошибается, считая, что смешение в линиях происходит через слияние. Смешение же в поверхностях происходит не через соположение и не через разрушение (κατὰ σύγχυσιν) [42], но скорее через слияние. Представим круг на плоскости и точку над ним. Проведя из точки прямую к обводу круга и совершив оборот, мы получим коническую поверхность, и она будет смешанной. Вновь рассечём её, разлагая на простейшие. Проводя это сечение через вершину к основанию, мы получим треугольники, а вдоль основания – плоские круги. Присущий линиям способ смешения

[40] Термины заимствованы из стоической физики. Смешаны через соположение песок и пшено, так как в каждом месте находится либо песчинка, либо зёрнышко пшена. Смешаны через слияние вино и вода: они проникли друг в друга повсюду, и в каждом месте находятся и вино, и вода; но отделение одного от другого всё-таки возможно.

[41] Это не Феодор Киренский, известный нам по диалогу Платона *Теэтет*. Скорее всего, речь здесь идёт о Феодоре Солийском, которого Плутарх упоминает в трактате *О порождении души в Тимее* 1022d.

[42] Когда вещи смешаны через разрушение, от их отдельных сущностей ничего не остаётся, и разделение уже невозможно.

не обнаруживает слияния, поскольку он не возвращает нас к простейшей природе элементов. Тогда как поверхности при рассечении прямо показывают, из каких линий они возникли. И поэтому, как сказано, способ смешения в линиях и в поверхностях различен.

И как среди линий простыми являются только прямая и окружность, и даже необученные люди имеют о них [119] предварительное представление [43], тогда как смешанные виды требуют более искусного понимания, так и среди поверхностей к элементарным видам относятся плоскость и сфера, которые понятны сами собой, тогда как для открытия множества смешанных поверхностей требуется знание и соответствующее рассуждение.

И удивительно, что из окружностей может быть получено множество смешанных поверхностей. Мы говорим, что таковы спирические поверхности, которые получаются вращением прямо выставленного круга вокруг фиксированной точки, не являющейся центром круга [44]. Три вида спирик возникают, когда центр лежит на обводе круга, либо внутри него, либо снаружи. Если центр лежит на обводе, возникает сплошная спирика, если внутри – переплетённая, если снаружи – разделённая. И спирических сечений тоже три, по этим трём разделениям [45]. И всякая спирика будет смешанной, при том что смешивается она круговым движением.

[43] Предварительное представление (πρόληψις) – ещё один термин стоической философии.

[44] Спирические, или тороидальные поверхности получаются вращением круга вокруг оси, лежащей в плоскости круга и не проходящей через его центр.

[45] Все описанные выше (112.4–8) спирические сечения были сечениями разделенного тора.

Смешанные поверхности возникают не только движением простых линий, как уже названные, но и сложных тоже. Три конических линии порождают четыре конических поверхности, так называемые коноиды [46]. Вращением параболы вокруг её оси получается прямоугольный коноид; вращением эллипса получаются так называемые сфероиды: когда вращение происходит вокруг большой оси – [120] удлинённый, когда вокруг малой – сплющенный; и вращением гиперболы получается другой коноид [47].

Заметим, что иногда мы получаем понятие поверхностей от линий, а иногда наоборот. К примеру, через конические и спирические поверхности мы постигаем конические и спирические линии.

И надо уяснить следующее различение между линиями и поверхностями: имеются три подобочастные линии, как было сказано выше, и только две поверхности, плоская и сферическая, – но не цилиндрическая. Ведь не все части цилиндрической поверхности могут совмещаться друг с другом [48]. О различении поверхностей сказано достаточно.

Наш геометр выбрал одну из них, плоскость, в качестве основы, на которой будут рассматриваться фигуры и их свойства. Ведь рассуждение для неё будет легче, чем для других поверхностей. На ней можно мыслить прямые, круги, спирали, отрезки кругов и прямых, касания и приложения, и строить все виды углов; на других же поверхностях не всё это можно наблюдать.

[46] См. Архимед, *О коноидах и сфероидах*.

[47] Этот коноид называется тупоугольным; в современной математике его принято называть двуполостным гиперболоидом вращения. Однополостный гиперболоид вращения античными математиками не рассматривался.

[48] Все части цилиндрической поверхности всё-таки совмещаются, но не при всякой ориентации.

Ведь как мы возьмём прямую или прямолинейный угол на сфере? И как мы будем рассматривать отрезки кругов и прямых на конусах и цилиндрах? Так что он определяет именно эту поверхность [121] и имеет дело всецело с ней. Это занятие называется плоской геометрией, и нам следует представлять себе плоскость, предстоящую нашим глазам, и изображать на ней всё, о чём мы размышляем, так что воображение становится чем-то вроде плоского зеркала, на котором размышляющее рассуждение оставляет свои следы.

8. Плоский угол – это наклон друг к другу двух линий, которые в плоскости встречают друг друга и не лежат на одной прямой.

Некоторые из древних включали угол в категорию соотнесённого (πρός τι), называя его наклоном линий или плоскостей друг к другу; другие относили его к качеству, говоря, что угол, подобно прямому и кривому, представляет собой определённое свойство поверхности или тела; иные же утверждали, что это поверхностное или плоское количество. Ведь на поверхности он делим линией, а в телах – поверхностью. А то, что делимо, может быть только величиной, причём не линейной, поскольку линия делима точкой. Так что ей остаётся быть плоской или телесной.

Однако если угол – это величина, и все конечные однородные величины имеют отношение (λόγος) между собой, то тогда [122] все однородные углы – скажем, все плоские, – должны иметь отношение между собой, в том числе и роговидный угол к прямолинейному. Однако все величины, имеющие отношение между собой, могут, взятые кратно, превосходить одна

другую [49]. Но тогда роговидный угол может превзойти прямолинейный, что невозможно. Ведь доказано, что он меньше любого прямолинейного угла [50].

Если же угол – только качество, как тепло или холод, как он может быть разделён на равные части? Ведь равенство и неравенство присуще углам не меньше, чем величинам, и делимость целого одинаково присуща тем и другим. Но если вещи, которым это присуще, суть количества, а не качества, то ясно, что углы не будут качествами. Свойства количества – быть бóльшим и меньшим, равным и неравным. Но мы говорим о неравных углах, большем и меньшем, а не о том, что один угол является более углом, а другой менее. Каждый может видеть, что это чуждо природе математики; ведь у всех углов одно определение, и один угол не более угол, нежели другой.

Что касается третьего случая, если угол является наклоном, и в целом – соотнесённым (πρός τι), то тогда одному наклону соответствует один угол, а не многие. Ведь если угол – не что иное, как сопряжение (σχέσις) линий или плоскостей, как может быть одно сопряжение, но много углов? [123] Но если ты представишь себе конус, рассечённый треугольником от вершины до основания, ты увидишь при вершине полуконуса один наклон линий треугольника, но два разных угла: один – плоский угол треугольника, другой – угол на смешанной поверхности конуса; однако оба эти угла ограничены двумя упомянутыми линиями. Стало быть, сопряжение линий не производит угла. Однако нам следует назвать угол либо качеством, либо количеством, либо соотнесённым. Фигуры – это качества, отношения (λόγοι) фигур между собой – это соотнесения (πρός τι). И нам следует отнести угол к одному из этих трёх родов.

[49] Кн. V, опр. 3.
[50] Предложение III.16.

Таковы возникающие здесь затруднения, и Евклид называет угол наклоном, а Аполлоний – схождением поверхности или тела к одной точке под ломаной линией или поверхностью (так он определяет общее понятие угла). Но мы вслед за нашим вождём [51] скажем, что угол – это не что-то одно, но сплетение одного с другим, так что в нём соединяются все эти сущности; и поэтому те, кто склоняют его к чему-то одному, создают затруднения. И таков не только угол, но и треугольник тоже. В нём имеется и количество, поскольку о треугольниках говорят как о равных или неравных, и материей для этого служит количество; но ему присуще и качество, по его фигуре. Потому о треугольниках говорят и как о подобных, [124] и как о равных, где одно взято от одной категории, а другое – от другой. Также и угол по своей величине относится к количествам, а по своей форме и характеру существования – к качествам, и в нём присутствует также сочетание ограничивающих его линий или охватывающих его поверхностей. И угол состоит из всего этого, а не из чего-то одного. Он делим и подвержен равенству и неравенству по своему количеству; но всё-таки об углах не говорят как об однородных величинах, потому что им присуще и качество, из-за которого углы зачастую оказываются несравнимыми между собой. Но угол может быть не один, когда наклон один, потому что между его наклонными заключено некоторое количество. И если мы обратим внимание на эти разделения, затруднения будут разрешены, и мы обнаружим, что особая сущность углов – не в схождении поверхности или тела, как говорит Аполлоний, хотя оно и вплетено в их сущность; и скорее это сама сходящаяся к точке поверхность, ограниченная наклонными линиями, нежели одна ломаная линия, или сходящееся тело, ограниченное наклонными поверхностями. Так

[51] Имеется в виду Сириан Александрийский, возглавлявший неоплатоническую школу перед Проклом.

что угол можно определить как [125] окачествленное количество в некотором сочетании, но не одно лишь количество, и не одно лишь качество, и не одно лишь сочетание. Вот что нужно сказать о сущностной основе углов, чтобы получить предварительное представление обо всём роде углов, до его разделения на виды. Таковы три мнения об угле.

Перипатетик Евдем, написавший книгу *Об угле*, объявил его качеством [52]. Размышляя над возникновением угла, он сказал, что оно состоит в изломе линии; и как прямизна является качеством, так и излом тоже; так что если возникновение угла содержится в качестве, то он конечно будет качеством. Евклид же и его последователи считали угол наклоном, причисляя его к отношениям (πρός τι). А количеством его называли те, кто говорил, что угол – это первое расстояние от точки [53], и этого мнения придерживались Плутарх [54] и Аполлоний. Они говорили, что в наклоне объемлющих линий или плоскостей должно иметься первое расстояние. Но поскольку расстояние от точки является непрерывным, невозможно взять первое. Ведь всякое расстояние делится до бесконечности. Кроме того, даже если бы мы смогли определить первое расстояние и провести через него прямую, получился бы треугольник, а не угол. Карп Антиохийский [55] сказал, [126] что угол – это количество, а именно,

[52] Концепцию угла как качества Евдем мог заимствовать у Аристотеля: см. *Категории* 10a11.

[53] Смысл этого определения в том, что сколь бы угодно малую окрестность вершины угла мы не оставили, отсекая остальное, угол этим не разрушится, но останется тем же самым.

[54] Плутарх Афинский, учитель Прокла и предшественник Сириана на посту главы Академии.

[55] Прокл называет его ниже «Карп инженер» (241.19). Симпликий (*CAG* VIII, 192.23) со ссылкой на Ямвлиха указывает, что Карп был пифагорейцем, пытавшимся решить проблему квадратуры круга с помощью некоей «кривой двойного движения».

протяжение между охватывающими его линиями или поверхностями. И хотя это протяжение – однократное, угол из-за этого ещё не становится линией, поскольку не всякое однократное протяжение характеризует линию. Однако парадоксально, если имеется величина, однократно протяжённая и не являющаяся при этом линией. Но об этом достаточно.

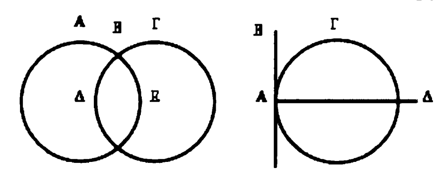
Заметим также, что одни углы являются поверхностными, другие – телесными: и из поверхностных одни будут простыми, а другие смешанными. Углы возникают и на цилиндрических поверхностях, и на конических, и на сферических, и на плоских. Из тех, что на простых поверхностях – одни на сферических, а другие на плоских. К примеру, зодиак пересекает круг равноденствий под двумя углами с вершинами в пересечениях. И это углы на сферических поверхностях. На плоскостях же одни углы ограничены простыми линиями, другие – смешанными, третьи – линиями обоих видов. К примеру, в эллипсе таков угол, охваченный осью и обводом эллипса. Одна линия здесь смешанная, другая простая. И если круг пересекается с эллипсом, возникает угол между его обводом и обводом эллипса. Когда линии циссоиды сходятся к одной точке, как листья плюща, – а она по нему и названа – они образуют угол, очевидно охваченный смешанными линиями. И когда [127] гиппопеда, одна из спирических линий, образует угол сама с собой, его охватывают смешанные линии. Углы между прямыми и окружностями охватываются простыми линиями. И опять, некоторые из них охвачены сходными линиями. Ведь когда две окружности пересекаются или касаются, они образуют углы трёх видов: двояковыпуклые, когда обе окружности выпуклы наружу, двояковогнутые, когда снаружи находятся две вогнутости, и ещё они называются скребкообразными, и смешанные, между выпуклым и вогнутым, каковы углы луночек. И угол может охватываться окружностью и прямой, причём двояко: прямой и выпуклым обводом, как у полукруга,

и прямой и вогнутым обводом, каков роговидный угол [56]. Углы, охваченные двумя прямыми, все называются прямолинейными, и они тоже делятся натрое.

Все эти углы, построенные на плоских поверхностях, наш геометр определяет здесь под общим именем плоских углов, относя их по роду к наклонам, а по месту к плоскости; и они образованы двумя линиями, а не тремя или больше, как телесные; и эти линии соединены вместе, причём не по одной [128] прямой, но под наклоном; и они охвачены двумя линиями, причём не только по вытянутости, но и по протяжению между ними.

Но, во-первых, кажется, что это описание не позволяет одной линии произвести угол, – однако циссоида одна образует угол, и гиппопеда тоже. Мы называем циссоидой линию в целом, а не её части (иначе можно было бы сказать, что это её части соединяются и образуют угол), и гиппопедой мы называем всю спирическую линию, а не её части. И каждая из них, будучи одной, образует угол, пересекаясь с собой, а не с другой линией. Во-вторых, кажется, что это определение ошибочно ещё и в том, что угол назван наклоном: как две линии могут образовать один наклон? И как тогда можно говорить о равных и неравных углах? Вот какие возражения обычно выставляются против этого мнения. В-третьих, условие «наклонные линии не лежат на одной прямой» не годится для углов между окружностями.

[56] Две пересекающиеся окружности образуют двояковыпуклый угол ΔΒΕ, двояковогнутый угол ΑΒΓ и лунообразный угол ΑΒΔ. На втором чертеже изображены роговидный угол ΒΑΓ и полукруговой угол ΓΑΔ.



Определение будет полным и без этого. Ведь наклон этих линий между собой образует угол, а круговые линии уже изначально не могут лежать на прямой. Вот что мы можем сказать об определении Евклида, отчасти пояснив его, а отчасти указав на содержащиеся в нём трудности.

9. Когда угол заключают прямые линии, он называется прямолинейным.

Мы говорим, что угол служит символом и образом соответствия в божественном рождении, а также [129] упорядочения, приводящего разделённое к единому, делимое к неделимому и множество к связному общению. Ведь он порождает связь многих линий и поверхностей, соединяет величины в неделимых точках и удерживает всякую основанную на нём фигуру. Вот и в оракулах угловые символы названы скрепами фигур, ибо они подобны связям и сочетаниям богов, соединяющим разделённое. Поверхностные углы несут на себе печать невещественного, простейшего и совершенного единства, тогда как телесные углы доходят до конечной и прерывной общности, и представляют всяческое разделение однородного устройства. Из поверхностных углов одни будут первыми и несмешанными, другие же содержат в себе бесконечное последовательное продвижение[57]; и одни являют разумное объединение вида, другие – ощущаемого логоса, прочие же – промежуточные узы. Углы между круговыми линиями подражают причинам, связывающим воедино умопостигаемое разнообразие: [130] ведь сами круговые линии в своём искривлении являются образами умопостигаемых видов. Прямолинейные углы представляют ощущаемое и обнаруживают соединение его логосов. А смешанные углы показывают объединение ощущаемых и умопостигаемых видов в одном неколебимом единстве.

[57] Противопоставление прямого угла острым и тупым углам.

Теперь нужно рассмотреть эти случаи и причины для каждого из них. У пифагорейцев мы найдём одни углы посвящёнными одним богам, другие – другим. Так поступил Филолай, который одним богам посвятил угол треугольника, другим – угол квадрата, или один и тот же угол – нескольким богам, а несколько углов – одному и тому же богу, сообразно различиям заключённых в них возможностей. Я думаю, что Асинский философ [58] считал демиургический треугольник первоначальной причиной элементов (στοιχείων) миропорядка, когда он поместил одних богов на его сторонах, а других – в его углах, первых – как хорегов продвижения и возможностей, вторых – как объединителей целого и собирателей розного. Всё это собрано нами ради созерцания сущего. О линиях здесь сказано, что они охватывают углы, и это не должно нас удивлять: ведь так оказываются связанными единство и разрозненность. И среди [131] богов, и в подлинно сущем полное и неделимое благо первенствует над многим и разделённым.

10–12. Когда прямая линия, установленная на прямую линию, образует равные между собой смежные углы, каждый из этих углов называется прямым углом, а прямая линия называется перпендикуляром по отношению к той, на которой она установлена. Тупой угол – это угол, больший прямого. Острый угол – это угол, меньший прямого.

Об этих трёх видах углов говорит Сократ в *Государстве* [59], обсуждая принятые геометрами предположения. А именно, прямолинейные углы по своим свойствам делятся натрое: пря-

[58] Имеется в виду Феодор Асинский (1-я половина VI в.), ученик Порфирия и Ямвлиха.

[59] Платон, *Государство* 510c.

мой, тупой, острый. Первый определяется равенством, тождеством и подобием, а оставшиеся два – бóльшим и меньшим, в целом же – неравенством, различием и неопределённостью по отношению к большему и меньшему. Большинство геометров не приводят обоснований для этого разделения, но принимают эти три угла в качестве предположения. И если мы потребуем от них указания причин, они отведут наш вопрос как неправомерный. Однако пифагорейцы, которые относили это тройное разделение к началам, не затруднялись объяснять причины и различия прямолинейных углов. Ведь в основе одного из начал находится предел, [132] и он служит причиной определённости, тождества завершённых вещей, равенства и вообще всего в столбце лучшего[60]. Другое же начало возглавляет беспредельное, выпускающее продвижение в бесконечность и порождающее из себя увеличение и уменьшение, неравенство и всеобщее различие; а в целом оно возглавляет столбец скудости.

На этом естественно основаны и прямолинейные углы: ведь логос предела применим только к прямому углу, ибо он управляем равенством и подобием со всяким другим прямым углом, всегда определён и самобытен, и никогда не допускает увеличения и уменьшения; тогда как логос беспредельного, будучи вторичным и двойственным, открывает два угла по обе стороны от прямого, которым свойственно неравенство большого и малого, большего и меньшего, и которым присуще неограниченное движение, у одного – к большей и к меньшей тупости, у другого – к большей и к меньшей остроте. Поэтому они относят прямые углы (ὀρθὰς γωνίας) к божественному миропорядку и к частичным возможностям в начальных посылках, как непоколебимый промысел вторичных причин, ибо прямое (τὸ ὀρθόν) несклоняемо ко злу и неподвижно, как и по-

[60] См. примечание к 7.3.

добает богам; тогда как о тупых и острых углах они говорят как о хорегах последовательности, движения и разнообразия возможностей. Тупой угол есть образ растяжения всех простых видов, тогда как острый отображает причины разделения [133] и движения целого. И в самом деле, прямоте (ἡ ὀρθότης) подобает охранять свою границу, а тупости и остроте – то, что с ними согласуется. Ведь они допускают большее и меньшее и никогда не прекращают своё неограниченное изменение. И правильно, что душе предписано нисходить в порождение по неуклонному образу прямого угла, не отклоняясь ни в ту, ни в другую сторону, не испытывая стремления ни к большему, ни к меньшему. Ведь склонность к разделению приводит к ошибкам и к неопределённости в самой материи.

Перпендикуляр (κάθετος) символизирует равновесие, безупречность, изначальную возможность, непоколебимость и тому подобное. Он же служит символом божественной и умопостигаемой меры. По перпендикуляру мы измеряем высоту фигур, и по соотнесению с прямым углом мы определяем другие углы, ибо сами они не содержат в себе определяющей сути. Они созерцаются в избытке и недостатке, и каждый из них сам по себе неопределён. Вот и говорят, что добродетель согласуется с прямотой, тогда как зло – с неопределённостью тупого и острого, и оно распадается на недостаток и избыток [134] и указывает этим на свою несоразмерность. И нам следует считать, что прямой угол среди прямолинейных углов является законченным, непоколебимым действием, умопостигаемой границей и пределом для всеобщего уподобления, а тупой и острый углы подобны неограниченному движению, неудержимому продвижению, разделению, расчленению, а в целом – неопределённости. Вот что об этом следует сказать.

В определения тупого и острого углов следует включить род. Каждый из них прямолинеен, причём один больше прямого, другой меньше. Но не всякий угол, меньший прямого

угла, будет острым. Ведь всякий роговидный угол меньше как прямого, так и острого, хотя сам он не острый; и всякий полукруговой угол меньше прямого, но сам он тоже не острый. Причина здесь в том, что эти углы являются смешанными, а не прямолинейными. Точно так же многие углы, заключённые между круговыми линиями, больше прямого, но при этом они не являются тупыми. Ведь тупой угол прямолинеен.

Отметим также, что в определении прямого угла наш автор берёт прямую и устанавливает её на другую прямую так, чтобы смежные углы получались равными; а тупой и острый углы он объясняет, не говоря о том, как одна прямая приложена к другой, но просто соотнося их с прямым углом. Ведь прямой угол служит мерой непрямых, как равенство служит мерой для неравных. И линий, проведённых под наклоном к другой линии, бесконечно много, а не одна, как перпендикуляр.

Ещё он говорит, [135] что углы «равны между собой», и я хочу отметить эту геометрическую точность. Ведь допустимо, чтобы углы были равны другим углам и не были прямыми. Однако равные по сути необходимо будут прямыми. Дополнение «смежные» представляется мне отнюдь не излишним, как неправильно считают некоторые, но проясняющим описание перпендикулярности. Ведь оба угла получаются прямыми именно потому, что они являются смежными и равными между собой, ибо причины равенства обоих и перпендикулярности каждого познаются благодаря безразличию установленной прямой по отношению к той и другой стороне. Так что причиной перпендикулярности служит не только равенство углов между собой, но и их смежное положение, опосредованное равенством.

А ещё я считаю важным напомнить о том, что автор *Начал* говорит о составлении фигур, лежащих в одной плоскости. И его определение перпендикуляра подходит не ко всем перпендикулярам, но лишь к лежащим в той же плоскости. Здесь неуместно определять так называемый телесный перпендикуляр.

Поскольку он определил плоский угол, он определяет и такой же перпендикуляр; тогда как телесный перпендикуляр образует прямые углы не только с одной прямой, но со всеми прямыми, касающимися его и лежащими в плоскости, на которую он опущен. Ведь таково его отличительное свойство.

13. Границей называется край чего-либо.

[136] Термин «граница» (ὅρος) прилагается не ко всякой величине, поскольку граница линии – это её предел (πέρας), но лишь к площадям поверхностей и объёмам тел.[61] Наш автор называет границей то, что замыкает каждую площадь (χωρίον), но это и её предел, однако не в том смысле, в каком точка – это предел линии, а в том, что граница отделяет площадь от того, что находится снаружи её. Это имя является обычным для геометрии с самого её начала, поскольку она занимается измерением площадей и размежеванием полей; откуда оно и вошло в эту науку. Так что когда он называет внешний охват границей, он естественно говорит о ней как о пределе площади. Ведь каждая из них ограничена охватывающей линией. Я утверждаю, что границей и пределом круга является его обвод, а сама его плоскость есть его площадь; и так же для других фигур.

14. Фигура есть то, что охвачено некоторой границей или границами.

Поскольку о фигуре говорится во многих смыслах, и она делится на разные виды, нам надо сперва рассмотреть эти различия, чтобы выделить тот вид, о котором сказано в опреде-

[61] В оригинале πρὸς τὰ χωρία τὰ ἐν ἐπιφανείαις καὶ τὰ στερεά: древнегреческая математика не знает наших отдельных понятий площади и объёма, обозначая «вместимость» плоских фигур и объёмных тел одним и тем же словом.

лении. Фигура возникает, когда вещи [137] сталкиваются или разделяются, или когда от них что-то отсекается либо что-то к ним добавляется, или когда они меняют свою форму, или претерпевают какое-нибудь иное воздействие. Они создаются искусством, лепкой или ваянием, в согласии с исходным замыслом мастера, и искусство предоставляет вид, а материя принимает форму, красоту и тому подобное. Более важные и блистательные фигуры творит природа, и одни из них составлены из подлунных элементов по их отношениям, а другие определяются в соответствии с небесными возможностями и движениями. Ведь небесные тела сами по себе и в отношении друг к другу представляют обширное и блистательное многообразие фигур, неся в себе то одну, то другую форму, схожую с мыслимыми видами; и в своих ритмических хороводах они воспроизводят бестелесные и нематериальные фигурные возможности. За ними идут фигуры души, прекраснейшие и совершеннейшие по своей красоте, исполненные жизни, по своему самодвижению предшествующие тому, что движимо иным, а по нематериальности и непротяжённости – протяжённому и материальному. Этому учит нас *Тимей*, раскрывая творческую и сущностную фигуру души [62]. Ещё выше, чем фигуры души, находятся умственные (νοερά) фигуры, которые во всём превосходят делимые сущности, всё освещают [138] неделимым мысленным светом, всё в целом рождают и совершенствуют, действуют в нём, будучи равными во всём и неподвижными, внося единство в фигуры души и удерживая изменения ощущаемого в его обычных границах. А выше всего этого находятся совершенные, единообразные, непознаваемые и невыразимые фигуры богов, вознёсшиеся над умственными фигурами, и они ограничивают фигуру вселенной и удерживают всё в единой

[62] Платон, *Тимей* 36bd.

границе. Эти теургические особенности запечатлены в статуях богов, имеющих разные фигуры. Одни из них выражают собой неизрекаемые характеры, показывая непознаваемую божественную мощь; другие подражают им через формы и оттиски, изображая одних богов стоящими, а других сидящими, некоторых – в виде сердца, других – в виде шара или иной фигуры; и одни из них – простые, другие – состоящие из множества форм; одни – торжественные, другие – обыденные и выражающие благосклонность богов, третьи – грозные. И эти фигуры снабжены различными символами, родственными неслыханным богам. Так фигуры начинаются с богов и нисходят к низшим [порядкам бытия], выражая их первейшие причины. Ведь совершенные фигуры предшествуют несовершенным, имеющие бытие в себе – получающим его от других; и первые восполняют [139] недостатки вторых и сохраняют чистоту своей природы.

Материальные фигуры причастны бесформенной материи и потому утрачивают подобающую чистоту; небесные фигуры делятся на части и основываются на другом; фигуры души соотносятся с разделением, приобретением многообразия и всевозможным развёртыванием; умственные фигуры вместе с единством обладают и выхождением во множественное; и возглавляют их фигуры богов – свободные, единообразные, простые, порождающие основу целого, содержащие в себе своё совершенство и передающие всему совершенство своих видов.

Мы не можем согласиться со словами многих о том, что ощущаемые фигуры производятся сложением, вычитанием и перестановкой. Ведь несовершенные движения не могут служить начальными и первичными причинами совершенных фигур. И те же самые фигуры могут приходить к завершению противоположными способами, так что одна и та же форма получается как сложением, так и вычитанием. Скорее мы можем

утверждать, что их порождение идёт совсем иначе, и их завершение определяется иными производящими причинами[63].

Неверно то, что нематериальные фигуры лишены основы, поскольку существует лишь то, что материально; неверно и то, как говорят другие, что они существуют отдельно от материи, лишь в мысли и в отвлечении. Ведь если они существуют лишь в отвлечении, как тогда сохраняются точность, [140] красота и порядок фигур? Если же они существуют как ощущаемые, они тут же расстанутся с непоколебимой и беспримесной точностью; а если они приобретают точность, упорядоченность и завершённость позднее, откуда всё это у них берётся? Из ощущаемого? – но там его нет. Из мыслимого? – но в нём они более совершенны. Сказать же, что они возникают из небытия – это самое невозможное. Как природе невозможно произвести несовершенное, а совершенное оставить несуществующим, так невозможно и представить, чтобы наша душа породила что-то более точное, совершенное и упорядоченное, нежели ум или боги. Ведь ощущаемым фигурам предшествуют самодвижущиеся, умопостигаемые и божественные логосы, и когда нас возбуждает ощущаемое, мы выдвигаем навстречу внутренние логосы, образы иначе существующего, так что мы распознаём ощущаемые вещи наглядно (παραδειγματικῶς), а умственные и божественные – образно (εἰκονικῶς). Мы открываем логосы в себе, и они показывают нам формы богов и единообразные границы целого, посредством которых всё невыразимо обращается к себе и в себе соединяется. Боги обладают сверхъестественным знанием фигур целого, порождающей способностью и основой для всего вторичного; фигуры природы обладают способностью создавать явления, хотя они лишены познания и восприятия разумного; отдельные души [141] обладают нема-

[63] Платон, *Федон* 101ad.

териальным умом и самостоятельным познанием, но не порождающей и побуждающей причиной. Так что как природа производительным образом предшествует ощущаемым фигурам, так и душа в своей познающей деятельности бросает логосы фигур в воображение, как в зеркало, оно же принимает образы и изображения, которые имелись внутри души. Так что душа отворачивается от образов и обращается к самой себе, подобно тому, кто, глядя в зеркало, удивляется силам природы и желает увидеть свою собственную форму и обладать такой способностью, чтобы быть одновременно и видящим, и видимым. Так же и душа смотрит из себя в воображении, видит подобные теням фигуры и, поражённая их красотой и порядком, восхищается собственным логосом, из которого они произошли; и восхищаясь их красотой, она ищёт саму себя. И она хочет проникнуть в себя и узреть там идеи круга и треугольника, полностью лишённые частей и всецело пребывающие друг в друге, и предстать перед видимым, и образовать множество, и созерцать вместилище богов, заповедные тайны и неизрекаемые фигуры, и обнаружить неприкрашенную красоту богов, и увидеть не имеющий частей круг [142] во всяком центре, и непротяжённый треугольник, и всякий другой предмет познания в его единстве. Ведь самодвижная фигура предшествует движимой иным; не имеющая частей предшествует самодвижущейся; и тождественная одному (ἑνί) предшествует не имеющей частей. И восхождение всех фигур завершается на однице (ἑνάδα)[64], из которой все они и вышли.

Мы можем долго воздавать хвалу этому учению пифагорейцев. А наш геометр, созерцая фигуры в воображении и их

[64] Учение о божественной однице (генаде), связывающей Единое с реальностью, было развито Плотином и позднейшими неоплатониками. См. Прокл, *Начала теологии*, 113–127.

определяя первично (хотя вторично их определение (λόγος) подходит и к ощущаемому), говорит, что фигура есть то, что охвачено некоторой границей или границами. Он берёт её сразу вместе с материей и воображает протяжённой, верно назвав её конечной и ограниченной. Всё, имеющее материю, будь то мыслимую или ощущаемую, имеет и границу; и его предел – не от него самого, но от определяющего, и граница – не от него самого (ведь оно не самоограничено), но от ограничивающего, и оно не пребывает в себе, но охвачено другим. Ведь материя по природе связана с количеством, сосуществует с ним и из него возникает, и количество – это её основа. А его логос и форма – это фигура и вид. И они её определяют, характеризуют и придают ей некую границу, простую или составную. Ведь логос фигуры разворачивается в последовательности двух видов, предела и беспредельного, [143] равно как и логос угла, и одна граница и простой вид придаются охватываемому вместе с пределом, а многие – вместе с беспредельным. Поэтому всё, обладающее фигурой, имеет одну или много границ.

Евклид считает фигурой то, что обладает формой и материей, и сосуществует с количеством, так что он естественно называет его охваченным. Однако Посидоний определяет фигуру как замыкающий предел, отделяя логос фигуры от количества и полагая его причиной ограниченности, определённости и охваченности. Ведь замыкание отлично от замкнутого, и предел – от определённого. И похоже, что этот автор смотрит на сам охватывающий предел, а тот – на предмет в целом, так что тот называет кругом всю плоскость и её границу, а этот – только окружность. Тот определяет имеющее фигуру, рассматривая её вместе с основой, а этот стремится выразить сам логос фигуры, ограничивающей и замыкающей количество. И если логически изощрённый муж обвинит определение (λόγος) Евклида в том, что оно определяет род через виды (ведь охваченное одной границей и многими границами суть виды фигур), мы ответим

ему, что роды – это в возможности [144] всегда и виды. Так что когда древние хотели прояснить роды через наличные возможности, они пользовались видами, хотя по истине они объясняли род через себя и через свои возможности. И такое определение (λόγος) фигуры объемлет различие между многими фигурами через предел и беспредельное; и тот, кто так определяет фигуру, не поступает неуместно, различая в этом определении входящие в него возможности.

Но откуда происходит логос фигуры и какие причины он осуществляет? Первым делом я утверждаю, что он основан на пределе, беспредельном и их смешении. Поэтому одни виды он порождает через предел, другие – через беспредельное, третьи – через смешение. И окружности он порождает через предел, прямолинейные фигуры – через беспредельное, а те, что из них составлены – через смешение.

Во-вторых, он воплощает в себе целое, разделяемое на несходные с ним части, так что целое вложено в каждый из видов, а фигура делится на другие виды. Ведь и круг, и всякая прямолинейная фигура делятся на части, неподобные с их логосом, и автор *Начал* имеет с этим дело в своих *Делениях*, когда он делит фигуры то на подобные, то на неподобные.

В-третьих, он содержит возможность всеохватного множества, и тем самым представляет всевозможные формы [145] и порождает многообразные логосы фигур, и безостановочно себя разворачивает, пока не дойдёт до конца и не явит всеобщее многообразие видов. Показано, что единое сосуществует там с бытием и бытие с единым, так что и в прямолинейной фигуре присутствует окружность, и наоборот, прямолинейная фигура присутствует в окружности, так что целое пребывает во всём сразу и в каждом по отдельности. И эта способность приобретается от высшего порядка.

В-четвёртых, от первого числа взяты меры для последовательности видов, так что всё основано на числе, то на более

простом, то на более сложном. Треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и все многоугольники идут друг за другом в соответствии с бесконечным изменением чисел. Большинство не знает, по какой причине это происходит; однако для тех, кто разбирается в числах и фигурах, причина вполне ясна.

В-пятых, от другой вторичной целостности, разделённой на подобные, происходит деление видов на подобные, когда треугольный логос делится на треугольники, и квадратный – на квадраты. Как я уже сказал, именно это мы делаем, когда упражняемся с изображениями, но это происходит и гораздо раньше в исходных началах.

[146] Приняв эти толкования, мы сумеем объяснить многие возможности фигур, возведя их к исходным причинам. И одна общая фигура обретает свой порядок, получая своё завершение от упомянутых причин. Она приходит к родам богов, по-разному распределяя разные идеи и по-разному действуя. Одним она придаёт более простые формы, другим – более сложные, одним – простейшие фигуры, построенные на поверхностях, другим же, состоящим из телесной массы – определённые телесные фигуры. И всё имеется во всём – ведь формы богов всесовершенны и полны всяческих возможностей; но при этом каждая имеет и свою особенность, и они предпочитают разное. Ведь одни из них содержат всё круговое, другие – всё треугольное или четырёхугольное; и для телесных фигур то же самое.

15–16. Круг есть плоская фигура, охваченная одной линией, такой что все прямые линии, падающие на неё из одной точки, лежащей внутри этой фигуры, равны друг другу. Эта точка называется центром круга.

Первейшей, простейшей и совершеннейшей из фигур является круг. Он превосходит все тела [147] по своему более простому порядку, а все плоские фигуры – по выпавшему на его долю подобию и тождеству. Он аналогичен пределу, едини-

це, а в целом – столбцу лучшего[65]. И если провести разделение в космическом или надкосмическом, то круг по своей природе всегда обнаружится на божественной стороне. Разделив вселенную на небо и возникновение, ты присвоишь небу круговой вид, а возникновению – прямой. Ведь круговой вид появляется в изменениях и фигурах возникновения не иначе, как спустившись сюда с небес. Из-за круговращения небес возникновение возвращается к себе по кругу, и в неупорядоченное движение вносится правильная периодичность. Разделив бестелесные сущности на душу и ум, ты скажешь, что круг относится к уму, а прямая – к душе. Ведь сказано, что душа, возвращаясь к уму, движется по кругу. И как возникновение относится к небу, так и душа – к уму. А небо движется по кругу (он говорит, что небо подражает уму, а становление – душе; ведь душа проявляется то в одном, то в другом виде). Разделив же тело и душу, ты отведёшь всё телесное на сторону прямой, а всё душевное будет причастно кругу по своему тождеству и подобию. Ведь тело является составным и обладающим разнообразными способностями, подобно прямолинейным фигурам; а душа – простой и мыслящей, самодвижной и самодеятельной, возвращающейся к себе и [148] занятой собой. Так и в *Тимее*, хотя элементы вселенной составлены из прямых линий, затем им придаётся круговое движение, так что образование форм движущегося космоса отведено душе[66].

Из сказанного уже ясно, что круг первенствует над другими фигурами. Однако нам следует рассмотреть все связи, которые круг начинает со своей высоты и завершает в конце, осуществляя их все надлежащим образом и во всём принимая

[65] См. примечание к 7.3.
[66] Платон, *Тимей* 34c – о круговом вращении и 53c – о построении космических тел.

участие. Он обращает богов к единству со своими причинами, так что они пребывают в себе и не выходят из состояния блаженства. Он соединяет их со вторичными вещами, как центр с краями, и обставляет их множеством способностей, тем самым собирая эти вторичные вещи воедино. Мыслимым сущностям он придаёт способность действия и наполняет их мыслью, соединяя их в себе и завершая их умственное постижение. Ведь ум всегда выставляет мыслимое в центре перед собой, а затем сливается с ним в страстном любовном порыве, окружая его всеми своими действиями. Души, освещённые своей собственной жизнью и движением, обращаются к уму и обходят вокруг [149] ума, как отдельные индивиды, периодически возвращаясь домой. И опять-таки мыслимое обладает властью над душами, а деятельность душ состоит в кружении вокруг него. Ведь каждая душа благодаря своей разумности и единству сосредоточена на высшем, где она наконец-то остаётся одна, однако из-за множественности она вынуждена ходить по кругу, страстно охватывая свою мысль. Круги небесных тел служат отображением ума в его подобии и единообразии, они охватывают целое своими пределами, определяют меру обращения, вечное существование без начала и конца, и всё такое прочее. Подлунные элементы сообразуются с кругом небес по периодам изменений, как с нерождённым среди возникающего, неподвижным среди движущегося и определённым среди делимого. Ведь вещи всегда существуют в кругу возникновения; и равноправие устанавливается через воздаяние гибели. И если бы возникновение не возобновлялось, весь миропорядок вскоре бы пришёл к разрушению. Животные и растения получают от круга схожесть поколений. Ведь они рождаются из семени и сами производят семя, так что порождение становится взаимным, когда совершается обращение по кругу от незрелого к зрелому и обратно, так что рождение сопровождается гибелью. Так называемым противоестественным вещам круг придаёт

порядок, а их неопределённости – [150] границу, и правильно их выстраивает по последним следам их способностей. И число, определяющее круговороты плодовитости и бесплодия, установлено по обращению кругов, как сказано в рассуждении о Музах [67]. И все разновидности зла отходят от богов к месту смертных, но, как говорит Сократ [68], они сменяют друг друга сообразно круговым периодам и порядкам. Ведь чтобы не существовало беспримесного зла, от которого отступились бы боги, совершенное предвидение целого кладёт неограниченному многообразию зла границу и порядок. Так круг всё упорядочивает для нас, распределяя блага и никого ими не обделяя, предводительствуя красотой, подобием, образованием видов и совершенством.

И в числах он связан с серединой непрерывной прогрессии, восходящей от единицы к десятке. Ведь среди этих чисел только пятёрка и шестёрка обнаруживают силу круга, возвращаясь к самим себе в идущей за ними прогрессии, ибо при умножении они оканчиваются сами на себя [69]. [151] Умножение служит образом прогрессии, вытягивающим множество, а окончание на само себя – образом остановки. Круговая способность вносит сюда и производящие причины множества, исходящие от неподвижного центра, и разворачивающие причины множества, действующие путём порождения. Два числа среди всех обладают этой особенностью: одно из них возглавляет весь возвратный род в мужской и нечётной природе, другое же собирает всё женское и чётное; и всё это связано цепью рождения с началами родства через круговые способности.

[67] Платон, *Государство* 545e.

[68] Платон, *Теэтет* 176a.

[69] Так называемые круговые последовательности: 5, 25, 125, 625, … ; 6, 36, 216, 1296, … .

Однако нам пора закончить со всем этим и рассмотреть, как математическое объяснение круга достигает своей предельной точности. Эта фигура повсюду охвачена и ограничена одной границей, и по своей природе она относится не к беспредельному, но к столбцу предела[70]. И она является плоской, ибо фигуры как таковые бывают поверхностными и телесными. При этом круг – это первейшая фигура среди плоских, и он не только превосходит телесные фигуры по своей простоте, но также и плоские фигуры по своему логосу, подобному единице, ибо он охвачен одной линией, относится к единому и определяется единым, без какого-либо [152] разнообразия границ.

И у этой фигуры равны все линии, проведённые из одной точки внутри неё. Ведь из фигур, ограниченных одной линией, у одних все линии, проведённые из середины, равны между собой, а у других не все. К примеру, эллипс ограничен одной линией, но не все прямые, проведённые из центра, в нём равны между собой, а только две из них; и плоская фигура, ограниченная циссоидой, имеет одну охватывающую линию, но у неё нет такого центра, чтобы все выходящие из него линии были равны между собой. Далее, поскольку центром круга всегда служит одна точка (ведь не может быть более одного центра), он добавляет, что равны между собой линии, проведённые к границе круга из одной точки. Ведь внутри круга бесконечно много точек, но из этой бесконечности только одна может быть центром. И поскольку такая точка, у которой все линии, проведённые от неё к обводу круга, равны между собой, может лежать либо внутри круга, либо вне его (ведь у каждого круга имеется такой полюс, что все проведённые из него к обводу линии равны между собой), он добавляет, что эта точка находится внутри фигуры. И он не напрасно рассматривает только центр, пренебрегая полюсом.

[70] См. примечание к 7.3.

Ведь он хочет рассмотреть всё, что лежит в плоскости, а полюс приподнят над плоскостью. И по необходимости он добавляет в самом конце, что такая точка внутри круга, у которой все проведенные из неё к окружности линии равны между собой, [153] является центром круга. Ведь имеются только две такие точки, полюс и центр, но тот находится вне плоскости, тогда как этот – внутри неё. Представим гномон [71], установленный в центре круга, и пусть его крайняя точка будет полюсом. Можно доказать, что все линии, проведённые из неё к окружности, будут равны между собой. Так вершина всей фигуры конуса служит полюсом для круга основания.

Разобравшись с тем, что такое круг, его центр, его обвод и фигура в целом, мы вернёмся к созерцанию их прообразов, и увидим, что центр – это всестороннее единство, неделимость и неподвижное превосходство, расстояния от центра – это пути от единства к бесконечному в возможности множеству, а обвод круга – это возвращение всего исходящего из центра обратно к нему же, так что множество возможностей обращается к своему единству, и все они стремятся к нему и деятельно около него толпятся. И как в круге сразу существуют центр, радиусы и внешняя окружность, так и в прообразах ничто не предшествует другому во времени и не следует за ним, но всё наличествует сразу: покой, выхождение и возвращение. Фигуры отличаются от прообразов тем, что последние неделимы и непротяжённы, тогда как эти делимы: в одном месте центр, в другом – [154] линии из центра, в третьем – внешняя окружность, ограничивающая круг; там же – всё в одном, и если ты возьмёшь центр, ты обнаружишь в нём всё, и в выходящих из него радиусах тоже содержится всё, и в возвращении тоже. И тогда ты увидишь всё во всём, так что уменьшится расхождение их положений,

[71] Вертикальный колышек, установленный в центре солнечных часов.

и вместо разделения ты обнаружишь сущий по сути круг, из себя выходящий, себя окружающий, в себе действующий, единый и многий, покоящийся, выходящий и возвращающийся, пребывающий в неделимой и единственной устойчивости, но также движущийся во все стороны по беспредельной прямой, и тотчас же свивающийся к своему единству, когда подобие и тождество гонят его к его неделимой природе и к таящемуся в ней единому. Обвивая себя, он подобен себе и окружающему его множеству. И возвращающееся подражает неподвижному, и обвод подобен расставленному центру, сходящемуся к себе, так что он стремится к центру и становится с ним одним, и что из какого начала вышло, туда оно в конце и возвращается. Таков повсюду находящийся центр, от которого всё получает своё существование и в котором всё начинается в переполненном выхождении. И математический центр, [155] в котором заканчиваются все линии, идущие от обвода, запечатлевает в них равенство, как образ собственного единства. И оракул определяет центр так: «центр, из которого все выходящие до внешнего обода равны». Ведь начало расхождения линий обозначается как «из которого», тогда как о середине обвода говорят «к которой», ибо линии отовсюду собираются к центру.

О первой причине, по которой появляется на свет и завершается фигура круга, следует сказать, что она является высочайшей вершиной в порядке мыслимого. Ведь центру подобает быть причиной предела, поскольку в выходящих из него линиях, беспредельных по количеству и величине, запечатлено беспредельное; а линия, которая окружает их неопределённое выхождение и собирает их обратно к центру, подобна скрытому миропорядку, о котором Орфей говорит как о движущемся по кругу: «Неутомимо вращалось по бесконечному кругу...[72]»

[72] *Орфические фрагменты*, 71а.

Ведь если космос движется своей мыслью вокруг мыслимого центра, то естественно будет сказать, что это движение на деле является круговым. И отсюда выходит тройственный бог, который заключает в себе первейшую причину последовательности прямолинейных фигур; и отсюда же – то имя, которым его нарекли [156] мудрецы, сведущие в божественных таинствах [73]. А треугольник – это первая из прямолинейных фигур. Фигуры впервые появляются на свет в божественном миропорядке, но своё существование они обретают в изначальных скрытых причинах.

17. Диаметр круга – это прямая линия, проходящая через центр и ограниченная с обеих сторон обводом круга, которая делит круг пополам.

Автор *Начал* поясняет, что он определяет не всякий диаметр, но диаметр круга. Ведь диаметр имеется и у квадрата, и вообще у параллелограмма, а среди телесных фигур – у сферы. Но в тех случаях говорят также о диагонали, а в случае сферы – об оси, для круга же – только о диаметре. Для эллипса, цилиндра и конуса тоже говорят об оси, а кругу присущ именно диаметр. Род для диаметра – прямая линия. Но в круге имеется много прямых линий, ибо в нём бесконечно много точек; однако из этих точек только одна – центр, так что диаметром называется лишь та [157] прямая линия, которая проходит через центр, причём она и не оканчивается раньше окружности, и не переходит за этот предел, но завершается на нём с обоих концов. Этим показано, как диаметр возникает. А заключительное добавление, что он делит круг пополам, показывает присущее ему действие в круге в сравнении с другими прямыми

[73] Τρισμέγιστος – «трижды величайший».

линиями, проведёнными через центр, но не завершающимися на окружности.

А то, что круг делится диаметром пополам, первым, как говорят, доказал сам Фалес. Причина же деления пополам – неуклонное прохождение прямой через центр. Ведь если она проходит через середину и всегда сохраняет своё движение, в безразличии к обеим сторонам, она во всех своих частях с обеих сторон отсекает равные части окружности [74]. А чтобы доказать это математически, вообрази диаметр и одну часть круга, приложенную к другой. Если они не равны, то одна лежит снаружи или внутри другой, и в обоих случаях получится так, что меньшая прямая будет равна большей. Ведь все прямые от центра до окружности равны между собой. Но тогда получится, что наружная будет равна внутренней. А это невозможно. [158] Так что они прилажены друг к другу и, стало быть, равны. Следовательно, диаметр делит круг пополам.

Поскольку на одном диаметре возникают два полукруга, а через центр проходит бесконечное число диаметров, это ведёт к двойной бесконечности по числу. Некоторые видят здесь затруднение, связанное с бесконечным делением величин. На это мы говорим, что величины делимы до бесконечности, но не на бесконечность. Здесь говорится о получении бесконечного на деле, там же – только в возможности; и здесь – о существовании бесконечного, там же – только о его возникновении. С одним диаметром возникают два полукруга; но число диаметров не является бесконечным, хотя они и могут браться до бесконечности. Так что число полукругов не будет дважды бесконечным. Возникшие всегда будут удвоенными, однако удвоенными в конечном, ведь их всегда будет в два раза больше по

[74] Это рассуждение вполне может быть первоначальным доказательством Фалеса.

числу, чем диаметров. Но почему бы всякой величине не иметь ограниченные деления, если число существует прежде величины, упреждая бесконечность и всегда полагая предел делению?

18–19. Полукруг есть фигура, охватываемая диаметром и отсекаемым им обводом. Центр полукруга тот же, что и у круга [75].

Из определения круга он находит природу центра в его отличии от всех прочих [159] точек в круге; а по центру он определяет диаметр и отделяет его от всех прочих прямых, проведённых в круге. А по диаметру он учит нас, чем является полукруг: ведь он охватывается двумя границами, каковые всегда отличны друг от друга, будучи прямой и обводом, причём прямая будет не случайной, но диаметром круга. Ведь сегмент, меньший или больший полукруга, также охватывается прямой и окружностью. Но это не полукруги, ибо деление круга не проведено через центр.

Все такие фигуры двувидны, тогда как круг является единообразным, и они составлены из неподобных. Ведь всякая фигура, охваченная двумя границами, охвачена или двумя окружностями, как луночка, или прямой и окружностью, как названная фигура, или двумя смешанными линиями, как при пересечении двух эллипсов (ведь между собой они охватывают фигуру), или смешанной линией и окружностью, как при пересечении эллипса с кругом, или смешанной линией и прямой, как в случае половины эллипса. Полукруг состоит из неподобных частей, однако все они просты и приложены друг к другу.

Прежде чем определять триадические фигуры, естественно рассмотреть двувидные, следующие за кругом. [160] Две пря-

[75] Здесь у Евклида одно определение, Прокл же видит два. Дальше то же самое. Всего у Евклида 23 определения, у Прокла 35.

мые линии не могут охватывать площади, а прямая и окружность могут; и две окружности тоже могут, образуя или углы, как в фигуре из вида луночек, или же фигуру без углов, как это делают две концентрические окружности. Отсечённая ими площадь заключена между двумя окружностями, одна снаружи, а другая внутри; и они не образуют угла, поскольку не пересекают друг друга, как это происходит в луночке или двояковыпуклой фигуре.

Далее, ясно, что центр полукруга тот же, что и у круга. Ведь диаметр с находящимся на нём центром задаёт полукруг, и все прямые, проведённые из центра к обводу, равны между собой. Но окружность – тоже часть круга. И прямые, проведённые ко всем частям окружности, равны между собой, когда они проведены из центра. Так что у полукруга и круга один центр. И полукруг – единственная фигура имеющая центр на своём периметре; я говорю здесь о плоских фигурах. Подводя итоги, можно сказать, что для центра имеются три положения: или внутри фигуры, как у круга, или на периметре, как у полукруга, или снаружи, как у некоторых конических линий [76].

Так что полукруг имеет тот же центр, что и круг. [161] Что это показывает и даёт для подобных случаев? Не то ли, что вещи, не вполне отошедшие от первых, но всё ещё им причастные, будут концентричны с ними и обусловлены теми же самыми причинами? Ведь полукруг имеет двоякую общность с кругом, по диаметру и по обводу. А потому и центр у них общий. И равно схожи с полукругом другие вторичные по порядку

[76] Прокл смешивает здесь два понятия центра. Центр круга, эллипса, гиперболы и т. п. – это центр симметрии. Центр круга, кроме того, обладает тем свойством, что все расстояния от него до периферии равны между собой. Центр же полукруга определяется по сопричастности полукруга кругу, и он не является центром симметрии, то есть не имеет ничего общего с центром гиперболы.

вещи – через причастность простейшим началам и общее происхождение; и даже будучи несовершенными и половинчатыми, они всё же восходят к бытию и к своим первым причинам.

20–23. Прямолинейные фигуры суть те, которые охватываются прямыми: трёхсторонние – тремя, четырёхсторонние – четырьмя, многосторонние – более, чем четырьмя.

После единообразной фигуры, которая находится ко всем прочим фигурам в отношении начала, и двувидного полукруга, рассматривается последовательность прямолинейных фигур, уходящая по числу в бесконечность. Этим объясняется и упоминание полукруга, потому что по своим границам он имеет общность и с кругом, и с прямолинейными фигурами, подобно тому как двойка находится посредине между единицей и числом. Ведь единица производит большее количество сложением, а не умножением, а число, напротив, [162] умножением, а не сложением; а двойка даёт равное и умножением на себя, и сложением с собой. И как она служит серединой между единицей и множеством, так и полукруг имеет общность и с прямолинейными фигурами по своему основанию, и с кругом по своему обводу.

Прямолинейные фигуры следуют по порядку чисел, от тройки и до бесконечности. Поэтому автор *Начал* начинает именно отсюда. Он говорит о трёхсторонних фигурах, о четырёхсторонних, и далее о тех, которые имеют общее имя многосторонних. Трёхсторонние фигуры также являются многосторонними, но они имеют и собственное обозначение, отличное от общего, тогда как для других, поскольку мы не в силах проследить за бесконечной последовательностью чисел, употребляется общее обозначение. Он упоминает только трёхсторонние и четырёхсторонние фигуры, поскольку три и четыре – это самые первые числа, одно – несмешанное нечётное

среди нечётных, другое – самое чётное среди чётных. Этим он стремится показать, что упорядоченное порождение прямолинейных фигур зависит от всех чисел, как от чётных, так и от нечётных. Более того, поскольку в первой книге *Начал* он учит о треугольниках и параллелограммах как о самых элементарных фигурах, он естественно ведёт перечисление до этих чисел, а все прочие обозначает общим именем. Вот и всё об этом.

Теперь мы вновь отметим, [163] что из плоских фигур одни охвачены простыми линиями, другие смешанными, третьи – и теми, и другими. Из тех, что охвачены простыми линиями, у одних это линии одного вида, как у прямолинейных фигур, у других – не одного вида, как у полукругов, сегментов и арок, которые меньше полукруга. Из тех, что охвачены линиями одного вида, у одних это круговые линии, у других прямые; и из тех, что охвачены круговыми линиями, у одних имеется одна линия, у других две, у третьих много. Сам круг охвачен одной линией; из тех, что охвачены двумя, одни не имеют углов, и таково кольцо, ограниченное двумя концентрическими кругами, а у других есть углы, и такова лунка; а число тех фигур, что охвачены более чем двумя линиями, бесконечно. Ведь одни фигуры охвачены тремя линиями, другие четырьмя, и так далее по порядку. К примеру, если три круга касаются друг друга, они высекают трёхстороннюю площадь, охваченную тремя обводами; а если их четыре – то четырёхстороннюю, и так далее. Из фигур, охваченных прямыми линиями, у одних их три, у других больше. Ведь две прямые не охватывают площади, и тем более одна. Так что у всякой площади, охваченной одной или двумя границами, эти границы или смешанные, или круговые. И те, у которых границы смешанные, тоже делятся надвое, [164] и одни их них охвачены смешанными линиями одного вида, наподобие так называемой циссоиды, другие же – линиями не одного вида, и такова арка. А смешение тоже бывает двояким, через приложение и через слияние. Далее, не всякая

трёхсторонняя или четырёхсторонняя фигура является прямолинейной, ведь такое число сторон может быть и в фигурах, порождённых обводами. Вот что говорится о разделении плоских фигур.

Ранее сказано, что прямая служит символом последовательности, движения и бесконечности, и что такой порядок порождения управляется богами, и служит причиной различия, изменения и движения. А потому прямолинейные фигуры обитают в жилище тех богов, которые начальствуют над порождением и происхождением видов. Поэтому по ним упорядочено космическое порождение, и по ним получают свой удел движущиеся и изменяющиеся сущности.

24–29. Из трёхсторонних фигур равносторонний треугольник имеет три равные стороны, равнобедренный – только две равные стороны, разносторонний (σκαληνός) – три неравные стороны. Далее, из трёхсторонних фигур прямоугольный треугольник – имеющий прямой угол, тупоугольный – имеющий тупой угол, остроугольный – имеющий три острых угла.

Разделение треугольников одним своим началом имеет их углы, другим – их стороны. [165] Сначала идёт известное разделение по сторонам, потом – особое разделение по углам. Ведь три угла – прямой, тупой и острый – присущи только прямолинейным фигурам; а равенство и неравенство сторон очевидно имеется и в непрямолинейных фигурах. Он говорит, что одни треугольники бывают равносторонними, другие – равнобедренными, третьи – разносторонними; ведь в треугольнике либо все стороны равны, либо все неравны, либо только две равны. И снова, что одни треугольники бывают прямоугольными, другие – тупоугольными, третьи – остроугольными. Прямоугольный определяется как тот, у которого один из углов – прямой, и аналогично – тупоугольный (ведь в треугольнике не

может быть больше одного прямого либо тупого угла); а остроугольный – как тот, у которого все углы острые. В этом случае недостаточно сказать, что у него один из углов острый, а иначе все треугольники оказались бы остроугольными. Ведь у всех треугольников имеется по два острых угла, а три острых – только у остроугольного.

Но мне кажется, что автор *Начал* приводит отдельное разделение по углам и отдельное по сторонам, потому что не всякий треугольник является трёхсторонним. Ведь имеются треугольные четырёхсторонники, которые одни называют крючковидными, а Зенодор [77] – пустоугольными (κοιλογώνια) [78]. Представьте трёхстороннюю фигуру, у которой к одной из её сторон приставлены [166] две прямые, идущие вовнутрь. Имеется площадь, охваченная двумя внешними сторонами и двумя внутренними, и один её угол охватывается внешними сторонами, а два других ограничены внешней и внутренней сторонами, и они находятся там, где эти стороны попарно сходятся. Ведь такой треугольник будет при этом четырёхсторонней фигурой. Так что ниоткуда не следует, что если мы найдём фигуру с тремя острыми углами, или с одним прямым, или с одним тупым, то при этом мы обнаружим треугольник, будь то равносторонний или какой-нибудь другой. Ведь она может быть и четырёхсторонней. Точно так же можно найти четырёхугольник, у которого больше четырёх сторон. Получается, что по количеству углов мы ещё не можем судить о числе сторон. Но об этом достаточно.

[77] Зенодор (вторая половина I в. н. э.) известен как автор трактата о изопериметрических фигурах, извлечения из которого сохранились в *Собрании* Паппа.

[78] Такая странная для нас классификация связана с тем, что углы, большие развёрнутого, греки углами не считали. Поэтому наш невыпуклый четырёхугольник оказывается для них треугольником, или, как выражается Зенодор, «пустоугольником».

Пифагорейцы говорили, что треугольник служит простым началом рождения и порождения видов. И в *Тимее* сказано, что треугольники являются основой природных логосов и элементами творения [79]. Они разделяются натрое, и сводят вместе всё делимое и переменчивое, и заполняют бесконечность материи, и устанавливают неразрывные связи материальных тел. Ведь треугольники охватываются прямыми и имеют углы, которые сводят вместе множество линий, обеспечивая их соединение и общность. [167] Поэтому Филолай заслуженно посвятил угол треугольника четырём богам: Кроносу, Аиду, Аресу и Дионису, охватив ими весь четырёхчастный миропорядок элементов, нисходящий с неба, или же от четырёх частей зодиака. Действительно, Кронос служит основой для всякой влажной и холодной сущности, Арес – для всякой огненной природы, Аид объемлет всю подземную жизнь, а Дионис ведает влажным и тёплым становлением, символ которого – вино, влажное и тёплое. Все они различаются по вторичным произведениям, но объединены между собой. Поэтому Филолай заключает об их единстве по единому и общему для всех углу. Если различие между треугольниками содействует порождению, естественно признать, что треугольник является началом для всего в подлунном мире. Прямой угол задаёт саму сущность и охватывает меру, так что логос прямоугольного треугольника производит сущности в порождении элементов; тупой угол задаёт расхождение вообще, так что тупоугольный логос порождает рост величины и всяческое растягивание материальных видов; острый угол связан с делением природы, и остроугольный логос приуготовляет процесс деления до бесконечности. Треугольный же логос как таковой [168] разделяет сущности и устанавливает все части материальных тел. Всё это мы можем созерцать

[79] Платон, *Тимей* 53e.

в треугольниках, и из этих разделений ясно, что всего имеется семь видов треугольников, не больше и не меньше. Равносторонний треугольник только один, и он остроугольный, а оставшиеся делятся натрое. Равнобедренный бывает прямоугольным, тупоугольным и остроугольным, и разносторонний имеет эти же три деления. Если эти делятся натрое, а равносторонний – единственен, то можно сказать, что всего имеется семь видов треугольников.

В разделении треугольников по сторонам ты ухватишь также аналогию с сущими. Равносторонний, во всём равный и простой, родственен божественным душам; ведь как мерой для неравного является равное, так и божественное – для всего вторичного. Равнобедренный родственен лучшим родам материальной природы, которые по большей части управляются мерой, тогда как оставшиеся причастны неравенству, безмерности и материи; ведь у него две стороны равные, а основание неравное. А разносторонний родственен отдельным живым существам, которые, приведённые в свой род и переполненные материей, во всем словно хромают и ковыляют.

[169] 30–34. Из четырёхсторонних фигур квадрат (τετράγωνον) – равносторонний и прямоугольный, прямоугольник (ἑτερόμηκες) – прямоугольный, но не равносторонний, ромб – равносторонний, но не прямоугольный, и ромбоид – имеющий равные противоположные стороны и углы, но не равносторонний и не прямоугольный; прочие четырёхсторонники называются трапециями.

Четырёхсторонники сперва разделяются надвое, и одни называются параллелограммами, а другие – непараллелограммами. Параллелограммы, в свою очередь, разделяются на прямоугольные и равносторонние, то есть квадраты; на те, у которых нет обоих этих свойств, то есть ромбоиды; на прямоугольные,

но не равносторонние, то есть прямоугольники; и на равносторонние, но не прямоугольные, то есть ромбы. Ведь параллелограммы по необходимости имеют либо и равные стороны, и прямые углы, либо ни того, ни другого, либо одно из двух, причём двумя способами, так что параллелограммы бывают четырёх видов. [170] Из непараллелограммов у одних только две стороны параллельны, а две другие нет, а у других параллельных сторон нет совсем. Первые называются трапециями, вторые – трапецоидами. Из трапеций у одних связки между параллельными равны между собой, у других не равны. Первые называются равнобокими, вторые – неравнобокими (σκαληνά). Так что имеется семь видов четырёхсторонников: квадрат, прямоугольник, ромб, ромбоид, равнобокая трапеция, неравнобокая трапеция, трапецоид.

Посидоний производит полное деление прямолинейных четырёхсторонников на эти семь видов, и для треугольников он делает то же самое. [171] Евклид же не может произвести разделение на параллелограммы и непараллелограммы, потому что он ещё не говорил о параллельных, так что он не может учить нас и тому, что такое параллелограмм. Все трапеции и трапецоиды он объединяет под общем именем трапеций, отделяя их от четырёх прочих видов, тем самым подтверждая, что это – параллелограммы в собственном смысле, у которых равны противоположные стороны и углы. Ведь и у квадрата, и у прямоугольника, и у ромба равны противоположные стороны и углы, но он говорит это только о ромбоидах, ведь иначе они определялись бы чисто отрицательно, как неравносторонние и непрямоугольные. Ведь когда все специфические описания утрачены, по необходимости остаются только общие; так что он называет здесь только общие для всех параллелограммов свойства. Ромб схож с расшатанным квадратом, а ромбоид со сдвинутым прямоугольником, – ведь они не имеют отличий в том, что касается сторон, но лишь в том, что у этих тупые и

острые углы, у тех же – прямые. Если представить, как квадрат или прямоугольник растянуты за противоположные углы, то обнаружится, что эти углы сходятся и становятся острыми, а другие – расходятся и становятся тупыми. Отсюда видно, что ромб (ῥόμβος)[80] и имя своё [172] получил из-за движения. Ведь если представить себе вращающийся квадрат, ты увидишь, что его углы покоробятся, так же как круг при таком же вращении становится эллипсом.

О самом квадрате (τετράγωνον) [81] спрашивают, почему он получил такое название. Ведь треугольник – это общее название, в том числе и для тех, у которых нет ни равных углов, ни равных сторон; и пятиугольник тоже. Почему же четырёхугольником не называют другие четырёхсторонние фигуры? И в самом деле, наш геометр, говоря об этих фигурах, употребляет такие выражения, как «равносторонний треугольник» или «равносторонний и равноугольный пятиугольник», что показывает, что они могли бы и не быть такими. Однако четырёхугольником называют исключительно равностороннюю и прямоугольную фигуру. Довод же для этого следующий: только квадрат имеет наилучшее устройство и в отношении сторон, и в отношении углов. Ведь [все его стороны равны между собой], и каждый его угол является прямым и служит мерой для прочих углов, не будучи ни слишком растянутым, ни слишком сжатым. И поскольку он являет превосходство в обоих отношениях, естественно дать ему общее наименование. А в треугольнике, даже если все его углы равны, все они будут острыми, точно так же как в пятиугольнике – тупыми. Поэтому естественно четырёхугольник с равными сторонами и прямыми углами, как самый полноценный из всех четырёхсторонников,

[80] Букв. «волчок», от ῥέμβομαι – «кружиться, вращаться».
[81] Букв. «четырёхугольник».

называть этим общим именем. [173] Ведь для выдающихся видов мы часто используем общее имя целого.

Пифагорейцы считали, что квадрат, более чем какая-либо другая четырёхсторонняя фигура, несёт в себе божественную сущность. Он знаменует собой в высшей степени незапятнанный порядок – ведь прямизна углов подражает неуклонности, а равенство сторон – стойкости. Ведь движение есть порождение неравенства, а покой – равенства; и причина устойчивости целого и незапятнанной и непоколебимой мощи выражается в квадратной фигуре, как в некоем образе. Кроме них, Филолай с другой точки зрения называет угол квадрата углом Реи, Деметры и Гестии. Ведь поскольку квадрат есть основа земли и ближайший к ней элемент, чему нас научает *Тимей*, и поскольку земля получает от всех этих богинь способность истечения и плодородия, он естественно посвящает угол квадрата этим освобождающим и жизнетворным богиням. Ведь некоторые называют землю Гестией или Деметрой, и они говорят, что она во всём причастна Рее, поскольку в ней заключены все подземные порождающие причины. Вот он и говорит, что единственным соединением этих божественных родов является угол, охватывающий квадрат. Квадрат также уподобляют всеобщей добродетели, как имеющий четыре прямых угла, каждый из которых совершенен в том же смысле, в котором мы говорим о совершенстве каждой добродетели, [174] о независимости, мере и границе жизни, ибо все они являются средними между тупыми и острыми углами. Не следует упускать из виду, что угол треугольника Филолай посвятил четырём богам, а угол квадрата – трём. Этим он указал на их взаимопроникновение и на то, что всё сообщается со всем: и нечётное с чётным, и чётное с нечётным. Четверичная тройка и троичная четвёрка, причастные к производительным и творческим благам, содержат целиком весь миропорядок рождённых вещей. Образованная ими двенадцатерица простирает первенство Зевса до единственной

единицы. Ведь угол двенадцатиугольника, по словам Филолая, принадлежит Зевсу, поскольку Зевс в одном единстве содержит целиком всё число двенадцатерицы. И у Платона Зевс предводительствует двенадцатерицей и управляет абсолютно всем [82].

Вот что мы хотели сказать о четырёхсторонних фигурах, чтобы прояснить размышления автора *Начал* и обозначить начальный рубеж теоретического броска для тех, кто ищет знания умопостигаемых и невидимых сущностей.

[175] 35. Параллельные суть такие прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи неограниченно продолжены в обе стороны, не встречаются ни с той, ни с другой стороны.

Некоторые элементарные факты (στοιχεῖα), относящиеся к параллельным и их признакам, мы изучим ниже; здесь же определяется, что такое параллельные прямые. Наш автор говорит, что они должны лежать в одной плоскости и не встречаться при неограниченном продолжении с каждой стороны. Непараллельные линии тоже могут не встречаться при некотором продолжении, но особенность параллельных состоит в том, что они не встречаются при неограниченном продолжении; и не просто, но ещё и при неограниченном продолжении в обе стороны. Непараллельные линии тоже могут не встречаться при неограниченном продолжении, но лишь с одной стороны, а не с обеих – ведь сближаясь с одной стороны, с другой стороны они расходятся. Причина этого в том, что две прямые не могут охватывать площадь. А если бы они сходились с обеих сторон, то охватывали бы. Далее, справедливо добавляется, что прямые должны лежать в одной плоскости. Ведь если одна из

[82] Платон, *Федр* 246e.

них лежит в плоскости, а другая целиком над ней, они не будут встречаться, но не будут и параллельными. [176] Так что плоскость должна быть одна, и при неограниченном продолжении они не должны встречаться ни с одной стороны. Если эти условия выполнены, прямые будут параллельными.

Так Евклид определяет параллельные прямые. А Посидоний говорит, что они не сходятся и не расходятся в одной плоскости, но у них все перпендикуляры, опущенные из точек одной прямой на другую, равны между собой [83]. Если перпендикуляры всегда становятся короче, прямые встречаются: ведь перпендикуляр определяет и высоту площади, и расстояние между линиями. И когда перпендикуляры равны, будут равными и расстояния между прямыми; но если они становятся больше или меньше, то с той стороны, где перпендикуляры становятся меньше, расстояние уменьшается и прямые встречаются.

Однако нам следует понимать, что отсутствие встречи не всегда делает линии параллельными – ведь обводы концентрических кругов не встречаются, хотя их линии продолжаются неограниченно. Это свойство имеется не только у прямых, но и у других линий. Можно представить спираль, обёрнутую около прямой, и при неограниченном продолжении прямой они не встретятся. Гемин правильно различает эти случаи в самом начале. Он говорит, что одни линии ограничены [177] и охватывают фигуру, и таковы круг, линия эллипса, циссоида и многие другие; другие же неограничены и могут быть неограниченно продолжены, и таковы прямая, сечения прямоугольного и тупоугольного конуса и конхоида. И опять, при неограниченном

[83] Существование таких прямых конечно же подлежит доказательству. А именно, надо доказать, что геометрическим местом точек, равноудалённых от данной прямой и лежащих по одну сторону от неё, является прямая.

продолжении один из них не замыкают фигуру, и таковы прямая и упомянутые конические сечения, другие же свиваются и производят фигуру, будучи после неограниченно продолжаемыми. Первые не встречаются, так что при продолжении не сталкиваются, вторые встречаются, так что сталкиваются при продолжении. Из невстречающихся линий одни лежат в одной плоскости, другие нет. Из невстречающихся линий, лежащих в одной плоскости, одни всегда имеют равные расстояния между собой, у других расстояние всегда уменьшается, как у гиперболы с прямой и у конхоиды с прямой. Но хотя расстояние между ними всегда уменьшается, они не встречаются, и хотя они сходятся друг с другом, однако никогда не сходятся полностью. Это одна из самых парадоксальных теорем в геометрии, согласно которой линии сходятся, но не встречаются. Из линий, между которыми всегда равные расстояния, таковы параллельные прямые: ведь они лежат в одной плоскости, и расстояние между ними никогда не уменьшается. Всё это я извлёк из *Добротолюбия* Гемина, чтобы осветить то, о чём шла речь.

ПОСТУЛАТЫ И АКСИОМЫ

[178] Геометрические начала делятся натрое: это предположения (ὑποθέσεις), постулаты (αἰτήματα) и аксиомы (ἀξιώματα), разницу между которыми мы уже объяснили выше[1]. Теперь же я ещё тщательнее разъясню различие между постулатами и аксиомами, ведь этот раздел нашей работы посвящён именно им. А предположения и так называемые определения уже рассмотрены выше.

Общее для аксиом и постулатов то, что они не требуют некоторого доказательства или геометрической веры, но берутся как известные и оказываются началами для последующего. А различаются они между собой так же, как теоремы и задачи[2]. Как в теореме предлагается увидеть связь и познать добавляемое к основанию, [179] а в задаче требуется нечто предъявить и произвести, так и в аксиомах берётся то, что само по себе очевидно для знания и воспринимается нашей мыслью без обучения, тогда как в постулатах мы принимаем нечто общедоступное и несложное, не нуждающееся для своего принятия в трудном размышлении, ухищрениях или подготовке. Так что очевидное бездоказательное знание и безыскусное принятие отличает аксиомы и постулаты, тогда как доказательное знание и подготовленное принятие отличает теоремы и задачи.

[1] См. 76.6.
[2] См. 77.7.

Начала всегда должны отличаться от следующего за ними простотой, бездоказательностью и самодостоверностью. «В общем, – говорит Спевсипп, – в охоте за знанием наша мысль без особых ухищрений выставляет их наперёд и готовит для будущих поисков, и имеет с ними более ясное соприкосновение, нежели зрение с видимыми вещами, а прочее она не может взять напрямую и продвигается к нему по шагам, доказывая и уловляя последовательно». К примеру, требование провести прямую линию от точки до точки наша мысль принимает легко и без затруднений. Ведь продвигаясь из точки ровным потоком и не отклоняясь ни в ту, ни в другую сторону, [180] прямая достигает другой точки. И если один из двух концов прямой неподвижен, то другой, двигаясь вокруг него, без каких-либо затруднений описывает круг. Но если мы захотим начертить спираль в один оборот, нам потребуется более сложное устройство, поскольку она производится многообразным движением; и чтобы построить равносторонний треугольник, нужен особый метод построения треугольника. Геометрический ум говорит мне, что когда я думаю о прямой, один конец которой закреплён, а другой движется вокруг него, и по ней от её неподвижного конца движется точка, я описываю спираль в один оборот: ведь если конец описывающей круг прямой достигнет начала движения в то же самое время, когда точка пройдёт всю прямую, они произведут именно такую спираль. И опять, если я опишу два равных круга, соединю точку их пересечения с центрами кругов и проведу прямую от одного центра до другого, я получу равносторонний треугольник. Для завершения этого нужно сделать много простых шагов от первых понятий, и мы предпочтём при построении следовать этим путём. Проходит ли такое построение легко или трудно, и ведётся ли доказательство через большее или меньшее число средних терминов, зависит от свойств изучаемого; вообще же нужда в построение [181] или доказательстве связана с тем, что искомое лишено ясности постулатов и аксиом. Аксиомы же

и постулаты, как я уже сказал, должны быть простыми и легко принимаемыми, причём постулат предписывает придумать и обустроить некую материю, имеющую простые признаки и легко воспринимаемую, аксиома же говорит о некоем неотъемлемом свойстве, которое само по себе известно слушателям, вроде того, что огонь горяч, или чего-нибудь ещё самоочевидного, так что о том, кто его отвергает, мы говорим как о лишённом чувств или нуждающемся в толчке. Так что постулаты и аксиомы относятся к одному роду, а чем они различаются, уже сказано. Как мы уже объяснили, оба они суть бездоказательные начала, одно таким образом, другое иным.

Однако некоторые предпочитают все их называть постулатами, равно как всё искомое – задачами. Так Архимед в начале книги *О равновесии* пишет: «Потребуем (αἰτούμεθα), чтобы равные тяжести на равных длинах уравновешивались». Но можно сказать, что это скорее аксиома. Другие все их называют аксиомами, равно как всё, требующее доказательства – теоремами. Кажется, что из-за этой аналогии они превратили специальное имя в общее. [182] И всё-таки, как задача отличается от теоремы, так и постулат – от аксиомы, хотя оба они и не требуют доказательства: первый принимается в силу лёгкости построения, со второй соглашаются в силу лёгкости познания.

Гемин отличает постулат от аксиомы при помощи этого рассуждения; другие же говорят, что постулаты присущи геометрической материи, тогда как аксиомы общи всем наукам, имеющим дело с количеством и величиной. Ведь это геометр знает, что все прямые углы равны, и что ограниченную прямую можно продолжить по прямой, тогда как равенство между собой равных одному и тому же – это общее понятие, которым пользуются арифметика и другие науки, применяя общее к своей материи. А Аристотель, как сказано выше[3], говорит, что

[3] См. 76.8.

постулат доказывается, и даже если учащийся с ним не согласен, он всё равно берётся в качестве начала; тогда как аксиома является недоказуемой, и все склонны её принять, даже если кто-нибудь на словах станет её оспаривать.

Так что их можно различать трояко, и первое различение основано на том, что постулат относится к построению, а аксиома – к знанию. Поэтому ясно, что равенство всех простых углов постулатом не является. Так же не является постулатом и пятый постулат: если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, [183] меньшие двух прямых углов, эти две прямые при их неограниченном продолжении встречаются с той стороны, с которой углы меньше двух прямых углов. Ведь эти утверждения приняты не ради построения: они лишь показывают признаки, относящиеся соответственно к равным углам и к прямым, продолженным с той стороны, где углы меньше двух прямых углов.

Согласно второму различению, не будет аксиомой то, что две прямые не охватывают площади, хотя некоторые относят это утверждение к аксиомам. Ведь оно имеет дело с геометрической материей, как и то, что все прямые углы равны между собой.

Согласно третьему различению Аристотеля, всё, чему мы верим через доказательство, будет постулатом, тогда как недоказуемое является аксиомой. Так что напрасно Аполлоний пытался доказывать аксиомы. Гемин правильно отметил, что одни выдумывают доказательства недоказуемого и стремятся утвердить общеизвестное с помощью менее известных средних терминов, и так поступает Аполлоний, когда он пытается доказать истинность аксиомы о том, что равные одному и тому же равны между собой [4], – тогда как другие подлежащее доказательству

[4] См. 194.20.

включают в недоказуемое, как поступает сам Евклид с пятым и четвёртым постулатами. Ведь некоторые считают их двусмысленными и требующими доказательства. И разве не смешно, что к недоказуемому отнесено то, обратные чему теоремы являются доказуемыми? Ведь то, что внутренние углы при встречающихся прямых меньше двух прямых углов, сам Евклид доказывает в следующей теореме: [184] «Во всяком треугольнике любые два угла меньше двух прямых»[5]. Так же ясно доказывается и то, что угол, равный прямому углу, не всегда является прямым углом[6]. И нельзя допустить, как говорит Гемин, чтобы обратные этим теоремам утверждения оставались недоказуемыми. Так что в этом перечне имеются только три постулата, а оставшиеся два, как и обратные к ним, требуют доказательного знания; и излишне также включать в аксиомы утверждение о том, что две прямые не охватывают площадь, поскольку уверенность в нём обретается через доказательство. О различии постулатов и аксиом сказано достаточно.

Возвращаясь к аксиомам, отметим, что одни из них относятся к арифметике, другие – к геометрии, третьи – к обеим наукам. То, что всякое число измеряется единицей – это аксиома арифметики; то, что равные прямые совпадают при наложении и что всякая величина делима до бесконечности – это аксиомы геометрии; а то, что равные одному и тому же равны между собой, и подобные ей являются общими аксиомами для обеих наук. Однако каждая наука применяет их к своему предмету: геометрия к величинам, арифметика к числам.

Также и среди постулатов одни относятся к частным наукам, другие являются общими. Допущение о разделении числа на наименьшие части – это постулат арифметики; допущение

[5] Предложение I.17.

[6] А именно, если этот угол не является прямолинейным: см. 184.3.

продолжить по прямой всякую конечную прямую – это постулат геометрии; а допущение об увеличении всякой величины до бесконечности, – это постулат, общий для обеих наук. Ведь это могут испытывать и число, и величина.

[185] Постулаты 1–3. Требуется от всякой точки до всякой точки проводить прямую линию, ограниченную прямую линию непрерывно продолжать по прямой, и из всякого центра всяким раствором проводить круг.

Эти три требования, из-за их ясности и полезности, необходимы нам среди постулатов, во всяком случае, если следовать Гемину. Проведение прямой линии от всякой точки до всякой точки следует из того, что линия является течением точки, и из того, что линия является ровным и неуклонным потоком. Ведь, вообразив точку, движущуюся ровным и кратчайшим движением, мы придём к другой точке, и тем самым получим первый постулат, ничего к нему больше не домысливая. А если мы возьмём прямую, оканчивающуюся в точке, и представим, как её конец движется дальше кратчайшим и ровным движением, тем самым легко и просто будет получен второй постулат. Если же мы представим ограниченную прямую с одним неподвижным концом и обведём другой конец вокруг неподвижного, получится третий постулат этого рода. Ведь неподвижная точка будет центром, а прямая – раствором; и какой бы ни случилось ей быть, таким будет и расстояние, отделяющее центр от окружности.

Если кто-нибудь спросит, как мы можем вводить движение в недвижные геометрические сущности [186] и двигать то, что не имеет частей, – что совершенно невозможно, – мы сочтём его плохо запомнившим то, что говорилось во *Введении* о наличном в воображении, а именно, что логосы записывают в

нём образы всего того, что имеется в этих логосах в разуме[7]. И эта незаполненная доска будет конечным и воспринимающим умом. Но это не устраняет трудности: ведь ум, получающий образы, получает их через движение. Однако будем думать об этом движении не как о телесном, но как о воображаемом, и допустим не то, что не имеющее частей движется телесным движением, но то, что оно является основой для путей воображения. Ведь ум, не имея частей, движется не переместительно; и воображение, будучи неделимым, движется своим особым движением. Рассматривая телесные движения, мы забыли о движениях, не имеющих протяжения. Не имеющее частей свободно от телесных мест и внешних движений; однако с ним связан другой вид движения и другое место, которое может созерцаться в его движении. Мы говорим, что точка обладает положением в воображении, и не спрашиваем, как не имеющее частей может где-либо двигаться и охватываться некоторым местом; ведь место для протяжённого само обладает протяжением, а место для не имеющего частей само не имеет частей. Поэтому особенности для геометрических видов одни, а для того, что на них основано – другие; и телесное движение – одно, а представляемое в воображении – другое; [187] и место для протяжённого одно, а для не имеющего частей – другое. Мы должны разделять их и не смешивать, чтобы не тревожить существо вещей.

И похоже, что первый из этих трёх постулатов образно показывает нам, как сущее объемлется и ограничивается своими неделимыми причинами, и что оно уже исходно ими охвачено со всех сторон: ведь прямая связывает наличные точки одну с другой, и охватывается ими, и лежит между ними. Второй постулат показывает, как сущее выходит из своих собственных

[7] См. 51.13–54.14.

начал ко всему прочему, сохраняя непрерывность и не отрываясь от них, но через бесконечную мощь причин разворачиваясь вовне себя. А третий постулат показывает, как всё, что выходит наружу, возвращается к своим началам; ведь обращение подвижного вокруг неподвижного подражает круговому возвращению.

Следует понимать, что бесконечное продолжение присуще не всем линиям. Его нет ни у окружности, ни у циссоиды, ни у очерчивающих фигуру линий в целом, ни даже у некоторых линий из тех, которые фигуру не производят. Ведь не может бесконечно продолжаться не только спираль в один оборот, ибо она лежит между двух точек[8], но и любая другая линия, производимая таким образом. И невозможно провести от всякой точки до всякой любую линию, ведь не всякая линия может лежать между всякими точками. Но хватит об этом, и пойдём дальше.

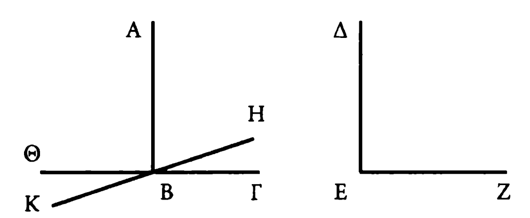
[188] Постулат 4. И чтобы все прямые углы были равны друг другу.

Если мы согласимся с тем, что это утверждение очевидно и не требует доказательства, то оно, согласно Гемину, окажется не постулатом, но аксиомой. Ведь оно говорит о том, что присуще прямым углам, и не приводит к построению через простое понятие. Оно не будет постулатом и по делению Аристотеля: ведь он полагает, что постулат требует доказательства. Но если мы скажем, что оно доказывается, и будем искать этого доказательства, то и тогда по Гемину оно не будет отнесено к постулатам.

Равенство всех прямых углов проясняется в нашем общем понятии (κατὰ τὰς κοινὰς ἡμῶν ἐπινοίας): ведь имея логос еди-

[8] Архимедова спираль может быть продолжена и далее, на любое число оборотов; такое продолжение спирали выполняет и сам Архимед в книге *О спиралях*.

ницы и будучи границей для бесконечного увеличения и уменьшения различных углов, всякий прямой угол равен всякому прямому углу. Ведь мы устанавливаем первый прямой угол, образуя равные углы по обе стороны от прямой, приставленной к другой прямой. Чтобы доказать этот постулат на чертеже, возьмём два прямых угла ΑΒΓ и ΔΕΖ. Я утверждаю, что они равны. Ведь если не равны, то один из них больше. Пусть это будет угол при Β. Если ΔΕ наложить на ΑΒ, то ΕΖ окажется внутри, [189] допустим по ΒΗ; и я продлю ΒΓ до Θ. Поскольку угол ΑΒΓ – прямой, будет прямым и угол ΑΒΘ, и они равны между собой (ведь по определению прямой угол равен своему смежному). Тем самым угол ΑΒΘ будет больше угла ΑΒΗ. Продлю ΒΗ до Κ. Поскольку угол ΑΒΗ – прямой, будет прямым и равным ему угол, сопряжённый с ΑΒΗ. Тем самым угол ΑΒΚ равен углу ΑΒΗ, так что угол ΑΒΘ будет меньше угла ΑΒΗ; но он больше, что невозможно. Так что прямой угол не может быть больше прямого угла.

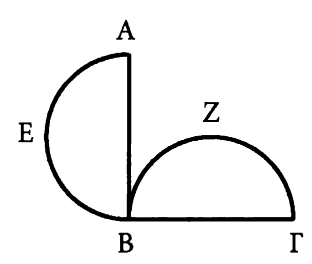


Это доказательство, приведённое другими комментаторами, не заслуживает большего внимания. Но Папп[9] верно указывает нам, что противоположное утверждение не является

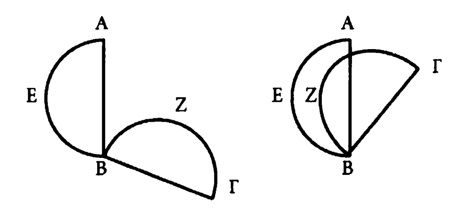
[9] Папп Александрийский (конец III – начало IV вв. н. э.) – автор *Собрания* в восьми книгах, в котором обозревается весь материал греческой геометрии, а также комментария к *Началам* Евклида, из которого сохранился в арабском переводе только комментарий к X книге.

истинным, ибо не всякий угол, равный прямому углу, будет прямым, но только прямолинейный – ведь можно показать, что угол с круговыми границами равен прямому углу, но ясно, что такой угол мы не отнесём к прямым. Ведь при рассечении прямолинейных углов мы получили прямой угол, установив прямую на другую прямую так, чтобы она не была наклонена, так что не всякий угол, равный прямому, будет прямым, но только прямолинейный.

Представим две равных прямых линии АВ и ВГ, [190] проведённые под прямым углом в В, и построим на них равные полукруги АЕВ и ВZГ, проведя их с нужными центрами и радиусами. Поскольку полукруги равны, они совпадают при наложении, и угол ЕВА равен углу ZВГ. Прибавим к ним общий остаток АВZ. Но тогда целый прямой угол будет равен луноообразному углу ЕВZ. Но луноообразный угол не является прямым. С другой стороны, если бы угол АВГ был тупым или острым, можно было бы показать, что он равен луноообразному углу: ведь этот вид угла с круговыми границами всегда соотнесён с прямым углом.



Надо заметить ещё, что в случае прямого и тупого угла мы должны добавлять угол, лежащий между прямой АВ и окружностью ВZ, а в случае острого – отнимать. Ведь тогда прямая АВ пересекает окружность ВZ. Оба этих случая изображены на чертежах.



[191] Эти чертежи подтверждают и то, что все прямые углы равны между собой, и то, что не всякий угол, равный прямому, сам является прямым. Ведь если он даже не является прямолинейным, как его можно назвать прямым?

Из этого постулата также ясно, что прямой угол сродни равенству, а острый и тупой – неравенству. Прямой угол находится в одном столбце с равенством (ведь оба они записаны под пределом, как и подобие), а острый и тупой – с неравенством, как и неподобие; ибо все они порождены беспредельным [10]. И потому одни, рассматривая в углах количество, говорят, что прямой угол равен прямому углу, другие же, глядя на качество, говорят об их подобии. Ведь равенство среди количеств – это то же самое, что подобие среди качеств.

Постулат 5. И если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых углов, эти две прямые при их неограниченном продолжении встречаются с той стороны, с которой углы меньше двух прямых углов.

Это утверждение надо совсем вычеркнуть из списка постулатов. Ведь это теорема, связанная со многими трудностями, которые Птолемей [11] попытался разрешить в одной из своих

[10] См. примечание к 7.3.

[11] Клавдий Птолемей (II в. н. э.), александрийский астроном, географ и математик.

книг [12], и её доказательство опирается на многие определения и теоремы. И сам Евклид обратное к нему утверждение [192] доказывает как теорему [13]. Однако некоторые ошибочно считают его постулатом, поскольку мы принимаем на веру тот факт, что когда указанные углы меньше двух прямых, эти прямые сходятся и встречаются. Гемин дал им прямой ответ, сказав, что от основателей этой науки мы научаемся тому, чтобы в доводах, принятых в геометрии, не обращать никакого внимания на правдоподобие наших представлений. И Аристотель сказал, что равно нелепо как довольствоваться верой в математике, так и требовать доказательств от ритора [14]. И Симмий у Платона говорит, что «те, кто производит доказательства, основанные на вере, по сути не отличаются от бахвалов» [15]. И хотя то, что при углах, меньших двух прямых, прямые линии сходятся, истинно и необходимо, всё же то, что сходясь при продолжении всё больше, они тем самым когда-нибудь встретятся, лишь правдоподобно, но не необходимо, пока не доказано, что для прямых это истинно. Ведь несмотря на то, что существование линий, которые неограниченно сближаются, но никогда не встречаются, кажется невероятным и парадоксальным, это всё-таки истинно и наблюдается в других видах линий. Но почему тогда для прямых линий невозможно то, что для других линий возможно? [193] Так что пока мы не доказали, что они встречаются, сказанное о других линиях будет служить отводом для нашего воображения. И хотя рассуждения, оспаривающие возможность встречи этих линий, заключают в себе много пораз-

[12] См. ниже, 365.7.

[13] Предложение I.17: в треугольнике сумма двух внутренних углов меньше двух прямых.

[14] Аристотель, *Никомахова этика* 1094b26.

[15] Платон, *Федон* 92d.

ительного, разве мы не станем лишь сильнее ограждать нашу традицию от всего того, что основано на вере, а не на разумном суждении?

Поэтому ясно, что нам надлежит искать доказательство предложенной теоремы, так как ей чужды особенности постулата. Но о том, как она доказывается и какими доводами уничтожаются выставленные против неё возражения, мы скажем, когда сам автор *Начал* соберётся её упомянуть и ей воспользоваться. Тогда и надо будет показать, что она не относится к недоказуемым, но познаётся через доказательство.

Аксиомы 1–5. Равные одному и тому же равны между собой; и если к равным добавить равные, то и целые будут равны; и если от равных отнять равные, то и остатки будут равны; и целое больше части; и совпадающие равны между собой.

Эти утверждения обычно называют недоказуемыми аксиомами, поскольку они всеми уважаются (ἀξιοῦται) и никто их не оспаривает. Ведь аксиомой обычно называют всякое простое предложение, которое либо обладает непосредственной подлинностью, либо требует некоторого напоминания. А последователи [194] Стои по обыкновению называли аксиомой всякое простое утвердительное предложение, и когда они пишут для нас руководства по диалектике под названием *Об аксиомах*,[16] они стремятся прояснить это в самом названии. Но некоторые более тщательно отличали аксиомы от других предложений, как непосредственные и самоочевидные, и называли их так за очевидность, как это делали Аристотель и геометры, согласно которым аксиома – это то же самое, что и общее по-

[16] Ср. SVF II 193.

нятие (ἔννοια κοινή). Мы присоединяемся к похвалам геометру Аполлонию, который, в отличие от Евклида, считал и аксиомы подлежащими доказательству; ведь тот причислил доказуемое к постулатам, а этот попытался отыскать доказательства для недоказуемого. Однако доказуемое и недоказуемое различаются между собой по природе; и в науках выделяется род неопосредованных предложений, которые из-за их очевидности используются во всяком доказательстве, когда их берут в качестве начал и пользуются ими в общих умозаключениях.

Найденное Аполлонием доказательство первой аксиомы предполагает такое опосредование, которое не более известно, чем заключение, и едва ли даже не больше него может оспариваться – чтобы увидеть это, достаточно бросить на это доказательство беглый взгляд. «Пусть А равно В, [195] и В равно Г. Я утверждаю, что А равно Г. Ведь А, будучи равным В, занимает то же самое место, и В, будучи равным Г, занимает то же самое место. Но тогда А занимает то же самое место, что и Г. Поэтому они равны».

Это доказательство опирается на два утверждения: во-первых, что занимающие одно и то же место равны между собой, во-вторых, что занимающие одно и то же место с одним и тем же сами также занимают одно и то же место. Ясно, что они темнее предложенной аксиомы. В самом деле: как равны занимающие одно и то же место? Целиком, или по частям, или отношением очертаний? Ведь не так просто перейти к рассмотрению места, которое менее известно для нас, нежели то, что его занимает, ибо отыскание его сущности окажется более трудным и спорным. Чтобы не множить слов, мы будем считать всякую аксиому непосредственной и самоочевидной, известной из собственного бытия и верной. Тот, кто доказывает самоочевидное, не подтверждает его истину, но уменьшает ту очевидность, которая у него была, когда мы приняли его без доказательства.

Так что примем это в качестве признака, отличающего аксиомы, – а также и то, что все они относятся к общему роду в математике. Ведь каждая из них относится не только к величинам, [196] но также и к числам, движениям и временам. И это необходимо. Ведь равное и неравное, целое и часть, большее и меньшее являются общими и для разделённых, и для непрерывных количеств. Все они берутся за очевидные в теориях, имеющих дело и со временем, и с движением, и с числами, и с величинами; и для всех них истинно то, что равные одному и тому же равны между собой, а также и всё прочее, что мы принимаем. И хотя они – общие, каждая теория берёт их для своей материи, поскольку они в ней востребованы: одна для величин, другая для чисел, третья для времён. Так общие аксиомы порождают особые заключения в каждой науке.

И не надо сводить их к меньшему числу, как сделал Герон, предложивший только три; ведь то, что целое больше части – это тоже аксиома, которую наш геометр неоднократно привлекает для доказательств; и то, что совпадающие при наложении равны, напрямую применяется к искомому в четвёртой теореме. Но не надо и добавлять к ним никаких других, одни из которых присущи лишь геометрической материи, как та, что две прямые не охватывают площадь – ведь аксиомы, как было сказано, относятся к общему роду; другие же следуют из уже принятых, как та, что удвоенные одного и того же равны между собой – ведь это следует из того, что если к равным добавить равные, то и целые будут равны. Ибо если к равным половинам [197] прибавить равные половины, то в удвоении получатся равные между собой, по свойству прибавления равных. В этом отношении не только удвоенные, но также и утроенные и вообще любые многократные будут равны.

Папп говорит, что к этим аксиомам надо приписать и ту, что если к равным прибавить неравные, то разность целых будет равна разности прибавляемых, и наоборот, если к неравным

прибавить равные, то разность целых будет равна разности исходных. Но хотя эти утверждения очевидны, они доказываются следующим образом. Пусть A и B равны, и к ним прибавляются неравные Γ и Δ, и Γ превосходит Δ на E. Поскольку A равно B и Z равно Δ, то и AZ равно BΔ. Ведь если к равным добавить равные, то и целые будут равны. Но AΓ превосходит BΔ только на E, то есть только на то, на что Γ превосходит Δ. И опять, пусть Γ и Δ не равны, и к ним прибавляются равные A и B, и Γ превосходит Δ на E. Поскольку A равно B и AZ равно BΔ, [198] целое AΓ превосходит BΔ только на E, то есть на то, на что Γ превосходит Δ.

Всё это следует из введённых ранее аксиом, и правильно исключено из большинства рукописей. Прочее из того, что он [17] добавил, также предварено определениями и следует из них: и то, что все части плоскости и прямой совпадают друг с другом (ведь всё натянутое к краям имеет такую природу); и то, что точка делит линию, линия делит поверхность, поверхность делит тело (ведь всё, что ограничивает нечто, его же и делит); и то, что в величинах имеется беспредельное и по прибавлению, и по измельчению, и то и другое в возможности (ведь всё непрерывное делится и растягивается до бесконечности).

[17] Т. е. Папп.

ПРЕДЛОЖЕНИЯ: Часть 1

[199] После того, как собрано изложенное выше, осталось рассмотреть то, что идёт после начал: ведь до этого рассматривались начала. Именно против начал выставляло свои возражения большинство критиков геометрии, стремясь показать, что эти части недостаточно обоснованы. Из этих часто повторяемых доводов одни, принадлежащие скептикам, отвергают всё знание и уничтожают плоды философии, словно войска, опустошающие чужие поля; другие, выставляемые эпикурейцами, ниспровергают только начала геометрии. Иные же принимают начала, но отрицают доказуемость следующих за началами предложений, не принимая их, поскольку в них содержится нечто, чего не было в началах. Этого способа опровержения придерживался Зенон Сидонский [1], [200] последователь эпикурейцев, против которого Посидоний написал целую книгу, показав никчёмность всех его мыслей.

Споры о началах мы уже рассмотрели выше, а наскоки Зенона мы обсудим чуть ниже. Теперь же мы кратко рассмотрим определения теорем и задач, различия между ними, их части и подразделения, а затем вернёмся к изложению доказанного автором *Начал*. Мы соберём самые элегантные из комментариев древних, урезав болтливое многословие, и представим

[1] Эпикурейский философ конца II – начала I в. до н. э.

лишь то, что относится к научным приёмам и методам, уделив основное внимание сути дела, а не множеству случаев и лемм, которые обычно привлекают новичков.

I. На данной прямой построить равносторонний треугольник.

Всё знание делится надвое, и одна часть занимается неопосредованными предпосылками, а другая тем, [201] что на их основе доказывается или строится, и в целом следует за началами. И вторая часть в геометрическом рассуждении делится на решение задач и отыскание теорем. Задачами (προβλήματα) называются такие предложения, в которых нечто не существовавшее строится, выставляется, устраивается и выводится на свет, а теоремами – такие, в которых познаются и доказываются свойства, присущие или не присущие рассматриваемым предметам. В задачах требуется нечто произвести, установить, приложить, вписать, описать, вставить, коснуться и тому подобное; а в теоремах надо связать и соединить через доказательство некие свойства, присущие предмету геометрии.

Всё, отыскиваемое в геометрии, может быть и предметом рассуждения, и что-то из него относится к задачам, а что-то – к теоремам. И вопрос «что это?» задаётся двояко: мы ищем либо описание и понятие, либо бытие самого предмета. К примеру, я спрашиваю: «что есть подобочастная линия?» Здесь или отыскивается определение такой линии, а именно: «подобочастной является линия, у которой все части совпадают при наложении», или берутся сами виды подобочастной линии, каковые суть либо прямая, [202] либо окружность, либо цилиндрическая спираль. Но спрашивают и так: «существует ли это?» И это чаще всего происходит при выявлении ограничений, когда спрашивают, возможно искомое или невозможно, а если возможно, то при каких условиях и сколькими способами. И конечно же задают и вопрос «каково оно?». Ведь когда рас-

сматривают неотъемлемые свойства треугольника, круга и параллельных, ясно, что ищут, каковы они.

Многие думают, что геометрия не рассматривает причину, то есть не отвечает на вопрос «почему?» Этого мнения, восходящего к Аристотелю[2], держится Амфином[3]. Однако Гемин говорит, что и этот вопрос можно обнаружить в геометрии. Ведь разве геометр не спрашивает, по какой причине в круг можно вписать неограниченное число равносторонних многоугольников, тогда как в сферу невозможно вписать неограниченное число многогранных фигур с равными сторонами и углами, составленными из одинаковых граней? Чье дело спрашивать об этом и разыскивать его, как не геометра? Когда геометры ведут доказательство от противного, они удовлетворяются отысканием признаков; и опять-таки, когда они выводят частичное заключение на основе предыдущего, причина не видна; но если это заключение общее и приложимо ко всем сходным случаям, ясно напрямую, откуда оно происходит. [203] Вот что можно сказать о рассматриваемых в геометрии вопросах.

Всякая совершенная задача и теорема должна содержать в себе следующие разделы: предложение (πρότασις), выставление (ἔκθεσις), ограничение (διορισμός), построение (κατασκευή), доказательство (ἀπόδειξις), заключение (συμπέρασμα). Предложение говорит о том, что дано и что является искомым. И совершенное предложение состоит из обеих этих частей. Выставление берёт сами данные и готовит их для поиска. Ограничение отделяет искомое и выясняет, каково оно. Построение добавляет к данным то, чего в них не хватает, и готовит ловлю искомого. Доказательство научным образом собирает налич-

[2] Эта отсылка к Аристотелю непонятна, поскольку сам Аристотель неоднократно говорит об отыскании причин в математике.

[3] См. комм. к 77.17.

ное из принятых посылок. Заключение возвращается к предложению, подтверждая то, что требовалось доказать.

Все эти разделы имеются и в задаче, и в теореме. Самые необходимые из них и всегда имеющиеся – это предложение, доказательство и заключение. Ведь нужно и изложить искомое, и доказать его посредством средних членов, и собрать доказанное. И ничто из этих трёх не может отсутствовать. Оставшиеся разделы могут как присутствовать, так и отсутствовать, если в них нет необходимости. К примеру, в задаче [204] «построить равнобедренный треугольник, к которого каждый из углов при основании вдвое больше оставшегося» [4] отсутствуют как ограничение, так и выставление. Во многих теоремах нет построения, поскольку одного выставления, без какого-либо добавления, уже достаточно для перехода от данных к доказуемому. Когда мы говорим, что выставление отсутствует? Когда предложение не содержит данных. Ведь предложение обычно состоит из данного и искомого, но здесь это не так. Бывает, что в нём сказано только об искомом, которое надо узнать или построить, как в только что приведённой задаче. Ведь здесь не названо никаких данных, по которым надо построить равнобедренный треугольник, у которого каждый из углов при основании вдвое больше оставшегося, – но просто предложено его построить. Мы можем усвоить это предложение на основе предварительного знания о равнобедренном, равном, удвоенном. Аристотель говорит, что этим отличается основанное на размышлении обучение [5]. И мы здесь ничего не допускаем, в отличие от других задач, к примеру от той, где нам предлагают разделить пополам данную ограниченную прямую. [6] Ведь пря-

[4] Предложение IV.10.

[5] Аристотель, *Вторая аналитика* 71a1.

[6] Предложение I.10.

мая дана, и нам предложено разделить её пополам; и отдельны данные, отдельны искомые. Когда предложение содержит оба раздела, мы обнаруживаем и ограничение, и выставление; но когда данные отсутствуют, отсутствуют и они. Ведь выставление [205] зависит от данных, и ограничение тоже. И оно будет одинаково с предложением. Ибо что ты ещё скажешь, ограничивая упомянутую выше задачу об отыскании равнобедренного треугольника? Здесь всё уже сказано в предложении. А если предложение не содержит ни данных, ни искомого, выставление умолкает, потому что данных нет, и ограничение опущено, чтобы не повторять предложения. Вы можете найти множество таких задач, особенно в арифметических книгах и в десятой книге, где предлагается найти две прямые, соизмеримые в степени и охватывающие среднее [7], и много других.

Всё данное дано одним из способов: по положению, по отношению, по величине, по виду. Точка может быть дана только по положению, но линия и другие фигуры – всеми способами. Когда мы говорим о данном прямолинейном угле, он дан по виду, а именно, что он прямолинейный; ведь угол, охваченный дугами окружностей, не делится пополам таким же методом. Когда даны две неравные прямые, и от большей требуется отнять часть, равную меньшей [8], они даны по величине. Ведь большее и меньшее, ограниченное и безграничное – это особенности величины. Когда мы говорим, что четыре [206] пропорциональные величины будут пропорциональны и перестановкой [9], дано одно и то же отношение в четырёх величинах. Когда от данной точки надо отложить прямую, равную данной

[7] Предложение X.28.
[8] Предложение I.3.
[9] Предложение V.16.

прямой [10], точка дана по положению; и если менять положение, будут выполняться различные построения: ведь данная точка может лежать вне прямой или на ней, причём в последнем случае – на её краю или между концами. И поскольку данное может быть прояснено четырьмя способами, возможны четыре способа выставления. И иногда два или три способа сплетаются между собой.

В том, что называется доказательством, мы иногда находим собственные признаки доказательства, когда к искомому приходят от определений через средние члены, и это совершенное доказательство; а иногда – доводы на основе указаний (ἐκ τεκμηρίων) [11]. И пусть это не будет скрыто. Хотя геометрические рассуждения всегда получают свою необходимость от материи своих предметов, они не всегда приходят к цели доказательными путями. К примеру, когда из того, что внешний угол треугольника равен двум противолежащим внутренним, получается, что сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым, каким будет доказательство, исходящее из этой причины? Разве средний член не оказывается здесь всего лишь указанием? Ведь если бы внешнего угла не было, внутренние углы всё равно были бы равны двум прямым; и треугольник имелся бы, даже если бы сторона не была продолжена. А когда мы показываем, что треугольник, построенный проведением кругов, является равносторонним, мы попадаем в цель, [207] делая бросок от причин. Ведь мы признаём сходство и равенство кругов причиной равенства сторон треугольника.

Далее, математики производят свои умозаключения в двояком смысле. Доказав нечто для данного, они считают, что доказанное верно и в общем, переходя от частного умозаклю-

[10] Предложение I.2.

[11] Ср. Аристотель, *Первая аналитика* 70b1–3.

чения к общему. Ведь они не обращают внимания на особенности предмета, – но, проводя перед глазами данный угол или данную прямую, они считают, что все их заключения будут верны и для всех схожих фигур. Они переходят к общему, чтобы мы не думали, что умозаключение относится к частному. Этот переход обоснован выставлением, когда в доказательстве берутся не эти фигуры, но схожие с ними. К примеру, делится пополам не этот взятый угол, но любой прямолинейный угол. Обладая присущими ему особенностями, он является прямолинейным, как и все прямолинейные углы вообще. Пусть данный угол будет прямым. Если я использую это в своём доказательстве, я не смогу перенести результат на весь вид прямолинейных углов; но если я воспользуюсь не его прямоугольностью, но лишь прямолинейностью, рассуждение сходным образом будет приложимо ко всем прямолинейным углам.

[208] Рассмотрим всё это на примере нашей задачи. Ясно, что это – задача, поскольку нам предложено построить равносторонний треугольник. Предложение состоит здесь и из данного, и из искомого. Дана ограниченная прямая, а отыскивается построенный на ней равносторонний треугольник, и сперва идёт данное, потом искомое, так что вместе выходит, что когда дана ограниченная прямая, то на ней возможно построить равносторонний треугольник. И если бы прямой не было, то построить треугольник было бы нельзя, поскольку треугольник охватывается прямыми; и если бы она была неограниченной, это опять было бы невозможно, поскольку угол откладывается только от одной точки, а не неограниченной прямой нет концевых точек.

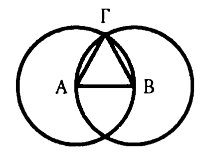
За предложением идёт выставление: «Пусть дана ограниченная прямая». Ты видишь, что в представлении сказано только о том, что дано, и не упомянуто искомое. Далее идёт ограничение: «Требуется на этой ограниченной прямой построить равносторонний треугольник». Цель ограничения заключается

в привлечении внимания. Когда объявляется искомое, наше внимание привлекается к доказательству, тогда как выставление готовит данные для усвоения, производя их перед нашими глазами.

[209] За ограничением идёт построение: «Проведём круг с центром в одном конце прямой и раствором в оставшейся, и ещё один круг, в котором, наоборот, центр будет раствором, а раствор – центром; и общую точку пересечения кругов соединим прямыми с концами прямой».[12] Как видно, я пользуюсь в построении теми постулатами, что от всякой точки до всякой точки можно провести прямую, и с данным центром и раствором можно провести круг. В общем постулаты участвуют в построении, как аксиомы в доказательстве.

Далее идёт доказательство: «Поскольку одна из двух точек данной прямой является центром охватывающего её круга, тем самым прямая, проведённая от неё до общего пересечения, равна данной прямой. И поскольку другая точка данной прямой также является центром охватывающего её круга, тем самым прямая, проведённая от неё до общего пересечения, также равна данной прямой». Это напоминание основано на определении круга, в котором сказано, что все прямые от центра равны между собой. «Каждая из них равна одной и той же. Но равные одному и тому же равны между собой по 1-й аксиоме. Так что все три равны. Тем самым на этой прямой построен равносторонний треугольник». Таково первое умозаключение

[12] Построение Евклида показано на чертеже.



за выставлением. За ним идёт [210] общее: «И вот на данной прямой построен равносторонний треугольник». Ведь если в выставлении взять прямую в два или в три раза больше данной, или любой другой большей или меньшей длины, построение и доказательство подойдут к ней тоже.

За этим идут слова «что и требовалось сделать», и таково заключение задачи. А заключением теоремы служат слова «что и требовалось показать». Ведь здесь требуется нечто сделать, а там – нечто открыть и показать. Он добавляет эти слова к своим заключениям, чтобы показать в целом, что предложенное осуществлено, соединяя конец с началом и подражая уму, который разворачивается и возвращается к своему началу. И он добавляет или «что и требовалось сделать», или «что и требовалось показать», чтобы отличить теорему от задачи.

Мы поупражнялись во всём этом, прояснив его на примере первой задачи. Пусть слушатель делает это в оставшихся предложениях, выясняя, какие главы в них включены, а какие исключены, и каким образом даются данные, и каковы те начала, из которых получено построение или доказательство. И этот теоретический обзор принесёт немалую пользу тем, кто упражняется в геометрическом рассуждении.

Теперь, когда мы сделали эти разграничения, кратко рассмотрим прочие, от них зависящие, каковы лемма (λῆμμα), случай (πτῶσις), поризм (πόρισμα), отвод (ἔνστασις), сведение (ἀπαγωγή).

[211] Леммой часто называют всякое предложение, которое берётся для того, чтобы основать на нём другое предложение, когда мы говорим, что доказательство ведётся из этой леммы. А леммой в собственном смысле в геометрии называют предложение, требующее подтверждения. Ведь когда для построения или доказательства мы берём нечто не доказанное, но требующее доказательства, такое не вполне надёжное положение, требующее разыскания, мы называем леммой. Она

отличается от постулата и аксиомы, будучи предметом доказательства, тогда как те принимаются на веру без доказательства, чтобы основать на них другие предложения. Для отыскания лемм нужна соответственная умственная пригодность. Ведь решения находят многие, но не все делают это методично. Так известный нам Кратист [13] замечательным образом отыскивал искомое, исходя из первых начал, в силу своих талантов. А методам надо учиться, и лучший из них – это метод анализа, в котором искомое сводится к известным началам. Платон, как уже сказано, научил этому методу Леодаманта, о котором известно, что он с его помощью сделал много геометрических открытий [14]. Вторым будет метод разделения, расчленяющий предложенный род на части и служащий исходной точкой для доказательства посредством устранения того, что не имеет отношения к предложенному. И сам Платон прославляет его [212] как помогающий во всех науках [15]. Третьим является метод сведения к невозможному, который показывает искомое не прямо, но исключая противоположное и по сопричастности отыскивая истину. Таково теоретическое значение слова «лемма».

О случаях говорят, когда имеются разные способы построения, при изменении положения точек, линий, плоскостей или тел. Многообразие случаев наблюдается на чертеже, и они называются так по перемене построения.

О поризмах говорят применительно к неким задачам, и Евклид написал книгу, названную *Поризмы* [16]. А в собственном смысле так говорят о результате, который мы получаем попут-

[13] О котором ничего более не известно.
[14] Ср. Диоген Лаэрций, III.24.
[15] Сам Платон применяет этот метод в диалогах *Федр*, *Софист*, *Политик*, *Филеб*.
[16] О утраченных *Поризмах* Евклида см. 301.21–302.13.

но, доказав другую теорему. Этот результат называется поризмом, как побочный продукт научного доказательства.

Отводом называется довод, выставленный против построения или доказательства. И тому, кто делает отвод, в отличие от рассматривающего случаи не нужно показать правильность предложения: это его оппоненту надо отклонить отвод и показать его ложность.

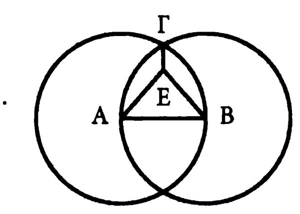
Сведение – это переход от одной [213] задачи или теоремы к другой, которая, будучи известной или построенной, делает предложенное очевидным. К примеру, при отыскании удвоения куба вопрос перенесли на другую задачу, от которой зависит первая – об отыскании двух средних, а дальше уже искали для двух данных прямых две средних пропорциональных. Говорят, что первым сведение геометрических чертежей осуществил Гиппократ из Хиоса, [17] который также квадрировал луночку и сделал ещё много других открытий в геометрии, ибо был талантлив, как никто другой, в построении чертежей. Но об этом достаточно.

Теперь перейдём к предложенной задаче. Всякому ясно, что равносторонний треугольник является самым прекрасным из треугольников и наиболее родственным кругу, у которого все линии из центра равны, и который ограничен одной простой линией. И треугольник сходным образом охвачен двумя кругами, каждым частично, – ведь он не описан каждым из них целиком, хотя каждый из них находится снаружи, – и это показывает, как происходящее от начал получает от них совершенство, тождество и равенство. Вот так и вещи, движущиеся по прямой, ходят по кругу в вечном порождении; и души, мышление которых преходяще, в своих возвращениях и обращениях [214] отражают неизменную деятельность ума. Говорят также, что жизнетворный источник душ окружён двойным умом. И

[17] О нём см. также 66.4.

если круг служит образом умопостигаемого бытия, а треугольник – образом первой души по причине равенства и подобия его углов и сторон, то естественно доказывать через круги тот факт, что среднее между ними будет равносторонним. И как всякая душа проистекает из ума, и возвращается к уму, и двояко причастна уму, так и треугольник, символ устройства души из трёх природ, берёт своё порождение в охвате двумя кругами.[18] Всё это напоминает нам о природе вещей.

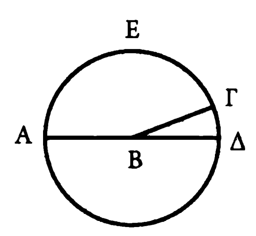
Поскольку некоторые отводили построение равностороннего треугольника, думая, что тем самым они полностью опровергают геометрию, мы им кратко ответим. Упомянутый выше Зенон [19] утверждает, что при данных началах геометрии мы не установим последующего, пока мы не признаем, что две прямые не могут иметь общего отрезка. Если это не показано, не показано и построение равностороннего треугольника. Пусть АВ – прямая, на которой строится [215] равносторонний треугольник. Пусть начерчены круги, и из их общего пересечения проведены прямые ГЕА и ГЕВ, имеющие общий отрезок ГЕ. Отсюда следует, что хотя прямые от общего пересечения равны данной прямой АВ, стороны треугольника не равны, но две из них меньше АВ. Но если это не установлено, то не будет установлено и дальнейшее. Так что, говорит Зенон, и при данных началах мы не установим последующего, пока мы не предположим, что ни окружности, ни прямые не могут иметь общих отрезков.



18 Ср. Прокл, *Начала теологии*, 184–211.
19 199.15.

На это мы сперва ответим, что в началах уже содержится то, что две прямые не имеют общего отрезка. По своему определению, прямая линия есть такая, которая равно лежит на своих точках. И равенство расстояния между точками самой прямой делает соединяющую их линию единственной и наименьшей, так что если прямые совпадают в какой-то своей части, они совпадают и в оставшейся части. И если каждая из них кратчайшим образом протянута между концами, то целое по необходимости будет касаться целого.

Далее, это же очевидным образом следует из постулатов. Ведь поскольку ограниченная прямая может быть продолжена по прямой, ясно, что продолженная линия – одна, и она продолжена одним движением. Но если это [216] принять за лемму и потребовать её доказательства, то пусть, если возможно, АВ будет общим отрезком АГ и АΔ. Проведём круг АГΔ с центром В и раствором ВА. Поскольку АВГ – прямая, проходящая через центр, АЕГ будет полукругом; а поскольку АВΔ – прямая, проходящая через центр, АЕΔ будет полукругом. Так что АЕГ и АЕΔ равны между собой, что невозможно.

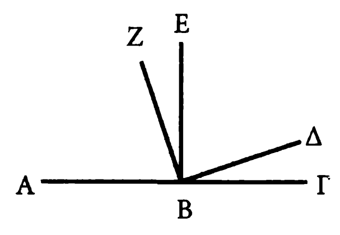


На это доказательство Зенон отвечает так: само доказательство того факта, что диаметр делит круг пополам, зависит от предположения, что у двух окружностей нет общего отрезка. Ведь мы предположили, что одна окружность будет совпадать с другой, а если нет, то ей выпадет быть снаружи или внутри неё. Но ничто не мешает целому, говорит он, совпадать не с це-

лым, но с частью. И пока не доказано, что диаметр делит круг пополам, предложенное не может быть доказано.

На это Посидоний правильно отвечает, подшучивая над эпикурейскими придирками, [217] что это доказательство будет верным, даже если окружности совпадут лишь частично. В той части, где они не совпадут, одна будет находиться внутри, другая снаружи, и такая же нелепость получится, если провести прямую от центра к другой окружности. Ведь проведённые из центра равны, большая к внешней и меньшая к внутренней. И они либо полностью совпадают и равны друг другу, либо частично совпадают, а частично расходятся, либо не совпадают ни в одной части, и тогда одна лежит внутри, а другая снаружи. Всё это отвергается тем же самым приёмом. И об этом достаточно.

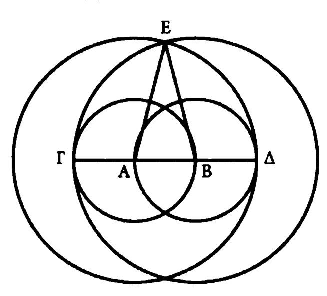
Зенон записал и другое доказательство того же самого, и подверг его нападкам. Пусть две прямые АГ и АΔ имеют общий отрезок АВ, и пусть к АГ восставлен перпендикуляр ВЕ. Тем самым угол ЕВГ – прямой. Если угол ЕВΔ тоже прямой, они будут равны, что невозможно; а если не прямой, восставим к АΔ перпендикуляр BZ. Угол ZBA – прямой, но и угол ЕВА – тоже прямой, так что они равны между собой, что невозможно.



Таково само доказательство: он подвергает его нападкам, поскольку в нём используется устанавливаемое позднее, а именно, что из данной точки к данной прямой можно провести перпендикуляр. Посидоний же говорит, что такое доказательство никогда не появлялось в *Началах*, [218] и что Зенон клеве-

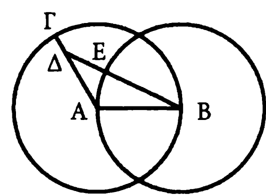
щет на геометров своего времени в том, что они пользовались дурным доказательством. И всё-таки об этом доказательстве надо кое-что сказать, поскольку одна из двух прямых всегда может быть перпендикулярна к другой, то есть любые две прямые могут образовать прямой угол. Это мы уже предположили в определении прямого угла: ведь прямой угол устанавливается только по наклону, так что допустим, что мы его установили случайно. И он добавляет, что и Эпикур, и другие философы предполагали в материи многое возможное и многое невозможное в соответствии с их теориями.

О равностороннем треугольнике сказано достаточно. Теперь надо построить и остальные, и первым делом – равнобедренный. Пусть АВ – прямая, на которой следует построить равнобедренный треугольник. Проведём окружности, как для равностороннего треугольника, и продолжим АВ в обе стороны до точек Г и Δ. При этом ГВ равна АΔ. Проведём круг ГЕ с центром В и раствором ГВ; и опять, проведём круг ΔЕ с центром А и раствором ΔА. Из точки Е, в которой круги пересекаются между собой, проведём к точкам А и В прямые ЕА и ЕВ. И вот ЕА равна АΔ, ЕВ равна ВГ, [219] АΔ равна ВГ, и ЕА равна ЕВ. Но они больше АВ. Так что треугольник АВЕ – равнобедренный, что и требовалось сделать.



Теперь на данной прямой АВ надо построить неравносторонний треугольник. Проведём круги с теми же центрами и растворами, что и прежде. Возьмём точку Г на окружности

с центром А, проведём прямую АГ, возьмём на ней точку Δ и соединим ΔВ. Поскольку А – центр, АВ равна АГ, и АВ больше АΔ. Но В – тоже центр, поэтому ЕВ равна АВ. ΔВ больше ВА, и ВА больше АΔ. Три стороны ΔВ, ВА, АΔ не равны между собой. Этот треугольник неравносторонний, так что мы построили три треугольника.



Всё это много раз обсуждалось. И здесь представляется изящным то, что равносторонний треугольник, всюду равный, составляется одним способом; равнобедренный, у которого только две стороны равны, составляется двояко: ведь данная прямая или меньше обеих равных, [220] как в нашем случае, или больше обеих. А неравносторонний, всюду неравный, составляется тремя способами: ведь данная сторона будет или наибольшей из трёх, или наименьшей, или одной больше, а другой меньше. И читатель может сам, растянуто или сжато, поупражняться в каждом из этих предположений. Нам же достаточно уже принятого.

В общем мы можем наблюдать, что некоторые задачи решаются одним способом, другие – многими, третьи – неограниченным числом способов. Следуя Амфиному, задачи с одним решением мы называем установленными, задачи с многими по числу решениями – средними, задачи с бесконечным множеством решений – неустановленными. Как устроены задачи, имеющие одно или несколько решений, ясно на примере треугольников: равносторонний составляется одним способом, а оставшиеся – двумя или тремя. Вот пример задачи с бесконечным множеством решений: «данную прямую разделить на

три части в непрерывной пропорции». Если прямая разделена в двойном отношении, и квадрат меньшей части [221] приложен к большей с недостатком квадрата [20], она будет разделена на три равных части. Но если больший отрезок будет к меньшему в отношении, большем двойного, скажем, в тройном, и квадрат меньшей части будет приложен к большей с недостатком квадрата, прямая будет разделена на три неравные части в непрерывной пропорции. И поскольку деление на две части, из которых большая имеет к меньшей отношение, большее чем двойное или тройное, не ограничено по числу способов, – ведь многократное отношение уходит в бесконечность, – то будет неограниченным и деление на три части в непрерывной пропорции.

Следует пояснить и то, что о задаче говорят во многих смыслах. Всё предложенное называют задачей, если его предложили для обучения или выполнения. А в математике задачей в специальном смысле называют то, что предложено для теоретического построения, поскольку цель такого построения находится в теории. Зачастую задачей называют нечто невозможное, но обычно же – то, что возможно выполнить, и что не содержит в себе ни избыточного, ни недостающего. Избыточное имеется в такой задаче: «построить равносторонний треугольник, угол при вершине которого составляет две трети от прямого угла». Добавленное избыточно, поскольку оно присуще всем равносторонним треугольникам. Из избыточных задач те, которые содержат несовместимые и невыполнимые условия, называ-

[20] Пусть нам нужно разделить данную прямую А на три части В, Г, Δ в непрерывной пропорции В : Г = Г : Δ. Выберем среднюю часть Г произвольным образом с тем ограничением, чтобы Г составляла не больше трети от А (и не больше половины от Е = А – Г). Поскольку В × Δ = Г × Г, нам следует разделить Е на две части В и Δ таким образом, чтобы прямоугольник В × Δ был равен квадрату на Г. Иначе говоря, нам следует «приложить к Е квадрат на Г с недостатком квадрата на Δ».

ются невозможными, а те, условия которых выполнимы, называются «более чем задачами». Задача является недостаточной и называется «менее чем задачей», когда к ней нужно нечто добавить, чтобы определить её порядок и ограничить [222] научными началами. Такова задача «построить равнобедренный треугольник». Она недостаточно определена и требует дополнения, каким должен быть этот равнобедренный треугольник, должно ли его основание быть больше или меньше других равных сторон, или что угол при вершине должен быть в два раза больше углов при основании, как в половине квадрата, или что каждый из углов при основании должен быть в два раза больше угла при вершине, или же эти углы должны иметь другое отношение, трёхкратное или четырёхкратное. И эти возможности изменяются бесконечно. Эти примеры показывают, что настоящие задачи избегают неопределённости и не порождают бесконечного множества решений. А плохо поставленные задачи называют задачами по соимённости. Ясно, что первая задача *Начал* имеет преимущество в том, что она не является ни избыточной, ни недостаточной, ни неопределённой и имеющей неограниченное множество построений. Таким и должно быть то, что служит элементом для других.

II. От данной точки отложить прямую, равную данной прямой.

В одних задачах случаев нет, в других их много; и то же для теорем. Говорят, что задача имеет случаи, когда одна и та же возможность проявляется в разных [223] чертежах, и изменение положения сохраняет способ доказательства; а если в ней имеется одно положение и одно построение, она не имеет случаев. Наличие случаев наблюдается в построении, как в теоремах, так и в задачах. И вот 2-я задача имеет много случаев. Точка дана в ней по положению, и дана единственным способом, – тогда как прямая дана и по виду, поскольку это не просто

линия, но такая-то линия, и по положению. Мы ищем прямую, равную этой прямой, отложенную от этой точки, где бы эта точка не находилась. Исходно понятно, что точка всегда лежит в одной плоскости с прямой, а не над ней: ведь в задачах и теремах планиметрии нам надлежит мыслить одну плоскость.

Есть здесь и затруднение: в каком смысле построенная прямая будет равна данной? А если данная прямая будет неограниченной? К условию подходит и ограниченная прямая, и неограниченная; ведь принятое всегда означает то, что взято нами для поиска. Он сам поясняет это, говоря «на данной ограниченной линии построить равносторонний треугольник» [21], или «к данной неограниченной прямой восставить перпендикуляр» [22]. Выставляющему эту трудность мы ответим так: разве не ясно, что когда он просит нас от данной точки отложить прямую, равную данной прямой, данная прямая берётся ограниченной? Во всяком случае, прямая, отложенная от данной точки, будет ограничена [224] самой этой точкой, и уже поэтому прямая, которой будет равна отложенная, тоже должна быть ограниченной. Ведь когда он говорит «из данной точки», он тем самым ограничивает обе прямые, как данную, так и равную ей отложенную [23].

Ясно, что случаи в этой задачи возникают из-за различия положений точки. Данная точка лежит или вне данной прямой, или на ней; и если она лежит на ней, она может лежать на одном из её концов или между краями; а если она лежит вне неё, она может лежать или сбоку от неё, так что прямая, соединяю-

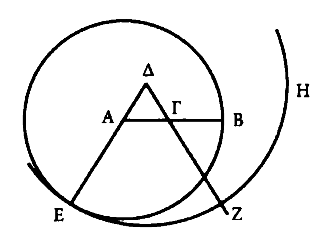
[21] Предложение I.1.

[22] Предложение I.12.

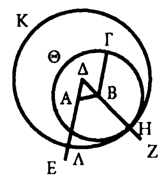
[23] Доводы Прокла не удовлетворительны, поскольку прямая может быть ограниченной с одной стороны. Впрочем, если данная прямая ограничена только с одной стороны, то никакой задачи, собственно говоря, и нет.

щая её с одним из концов данной прямой, образует с ней угол, или на её продолжении, так что прямая попадает в точку. Наш геометр рассматривает точку, лежащую вне прямой сбоку от неё [24]; мы же ради упражнения рассмотрим все прочие положения, разъяснив самые трудные из них.

Пусть данная точка Г лежит между концами данной прямой АВ. Построим, как и в *Началах*, равносторонний треугольник ΔГА на прямой ГА, и продолжим ΔГ и ΔА. С центром А и раствором АВ проведём круг ВЕ; и опять, [225] с центром Δ и раствором ΔЕ проведём круг EZ. Поскольку А – центр, АВ равна АЕ; и точно так же ΔЕ равна ΔН. Далее, ΔГ равна ΔА (поскольку треугольник ΔГА – равносторонний), и остаток АЕ равен ГН. Как уже показано, АЕ равна АВ. Тем самым ГН равна АВ. Следовательно, от данной точки Г проведена прямая, равная АВ.

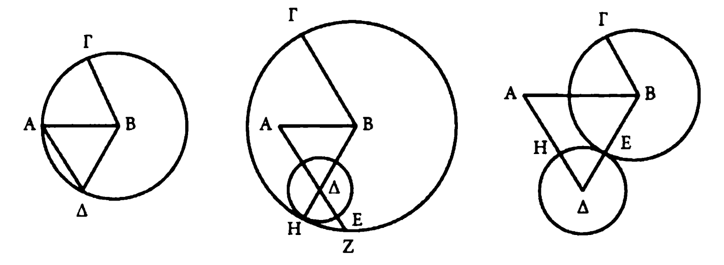


[24] Евклид выполняет это построение следующим образом. Пусть дана точка А и прямая ВГ. Построим равносторонний треугольник АВΔ. Продолжим ΔА до ΔЕ и ΔВ до ΔZ. Проведём круг ГНΘ с центром в точке В и раствором ВГ; проведём также круг НКΛ с центром в точке Δ и раствором ΔН. Здесь ΔΛ равна ΔН, ΔА равна ΔВ, поэтому и в остатках АΛ равна ВН. Но ВН равна ВГ, поэтому и АΛ равна ВГ, что и требовалось получить.



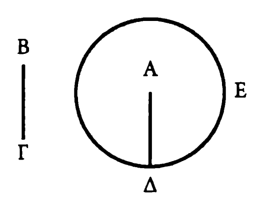
Многообразие случаев зависит от положения точки, от составления равностороннего треугольника, от продления сторон, от описывания кругов. Пусть, как в *Началах*, точка А лежит сбоку от прямой ВГ. Соединим ВА и построим равнобедренный треугольник АΔВ, вершина которого будет находиться не сверху (там нет места), а снизу. При этом АΔ будет равна ВГ, или больше, или меньше. И если равна, предложенное получено.

Если же меньше, проведём круг [226] с центром В и раствором ВГ, и продолжим АΔ и ВΔ до Н и Z. Проведём круг НЕ с центром Δ и раствором ΔН. Поскольку ΔН равна ΔЕ, как проведённые из центра, и АΔ равна ВΔ, как стороны равностороннего треугольника, в целом АЕ равна ВН. Но ВН равна ВГ, как проведённые из центра, так что АЕ равна ВГ, что и требовалось получить.



Если же АΔ больше ВГ (это оставшийся случай), проведём круг с центром В и раствором ВГ. Круг ГЕ пересекает ВΔ. И опять проведём круг с центром Δ и раствором ΔЕ. Круг НЕ пересекает ΔА. Поскольку Δ – центр НЕ, [227] то НΔ равна ΔЕ. Но также ΔА равна ΔВ, поэтому и остаток АН равен остатку ВЕ. Но ВЕ равна ВГ, ведь обе проведены из центра. Так что АН равна ВГ и выходит из А, что и требовалось получить. Имеются и многие другие случаи, но наличных уже достаточно. Пытливые слушатели могут поупражняться с ними самостоятельно.

Однако есть и такие, кто отвергает многообразие этого элементарного построения, рассуждая так. Пусть А – данная точка, и ВГ – данная прямая. Начертим круг ЕΔ с центром А и раствором ВГ, и проведём от центра А к окружности прямую АΔ. И она равна ВГ, ведь расстояние от центра взято равным ВГ, так что предписанное получено.



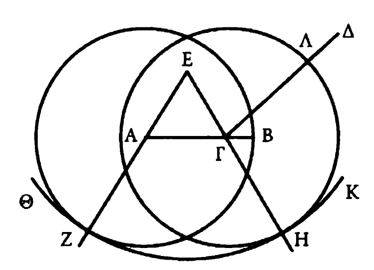
Говорящий это требует совершить логический круг (τὸ ἐν ἀρχῇ). Проводя круг ЕΔ с центром А и раствором ВГ, он уже берёт некую прямую, равную ВГ, и прикладывает её концом к А. Но чтобы описать круг, раствор должен быть отложен [228] из центра, однако центр здесь находится в другом месте, нежели раствор круга. Так что этот способ доказательства нам никак не подходит.

III. Даны две неравные прямые, и от большей требуется отнять часть, равную меньшей.

В этой третьей задаче даны две прямые, неравные по величине, и предлагается от большей отнять часть, равную меньшей. Здесь также имеется много случаев. Ведь данные неравные прямые могут быть отделены друг от друга, как у автора *Начал*, или они встречаются концами, или пересекаются, или конец одной делит другую, и это происходит двояко, когда бóльшая делит меньшую и меньшая бóльшую. Если они встречаются концами, доказательство очевидно. Приняв общий конец за центр и меньшую прямую за раствор, проведём круг, который пересечёт бóльшую прямую и отрежет от неё прямую, равную меньшей. Ведь когда круг отсекает у большей прямой

внутреннюю часть, она будет равна меньшей прямой. Но если одна прямая делит другую своим концом, будь то бóльшая меньшую или наоборот; и если они пересекаются, они делят друг друга [229] на равные или неравные части, или одна на равные, а другая на неравные, и так двояко. Всё это многообразие доставляет нам материал для упражнений. Рассмотрим из него несколько случаев.

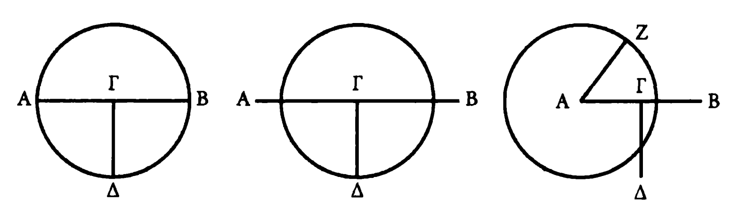
Пусть AB и ΓΔ – неравные прямые, и бóльшая ΓΔ делит AB своим концом Γ. Проведём круг BZ с центром A и раствором AB, и построим на AΓ равносторонний треугольник AEΓ. Продолжим EA и EΓ. Проведём круг ΘHK с центром E и раствором EZ. И вновь проведём круг HΛ с центром Γ и раствором ΓH. Поскольку EZ равна EH, как выходящие из центра E, и EA равна EΓ, то и остаток AZ равен остатку ΓH. Но AZ равна AB, как выходящие из центра A, и ΓH равна ΓΛ, как выходящие из центра Γ. Поэтому отрезана прямая ΓΛ, равная AB.



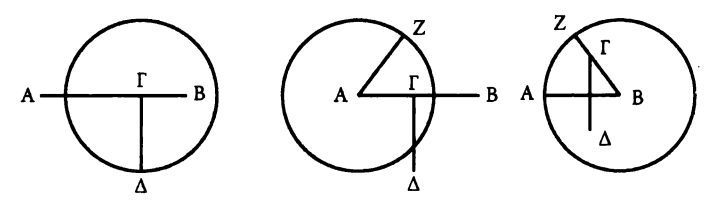
Пусть теперь ΓΔ меньше AB, и она делит AB своим концом Γ. И она делит её в середине или не в середине. [230] Сперва пусть делит в середине. Тогда ΓΔ – или половина AB, и AΓ равна ΓΔ; или меньше половины, и тогда мы проведём круг с центром Γ и раствором ΓΔ, и отнимем от AΓ линию, равную ΓΔ[25];

[25] Это построение сомнительно; ведь надо отнять меньшую прямую от конца большей, а не изъять её из середины. Непонятно, зачем в

или больше половины, и тогда мы отложим от точки A прямую AZ, равную ГΔ, и проведём круг с центром A и раствором AZ, который отнимет от AB линию, равную AZ, то есть равную ГΔ.



Но пусть ГΔ делит AB не в середине, и ГA больше половины. Если ГΔ равна или меньше половины AB, [231] с центром Г и раствором ГΔ мы отнимем от AГ линию, равную ГΔ. Если же ГΔ больше половины AB, то она либо равна AГ, и предложенное получено; либо она больше AГ, и тогда мы отложим от A прямую, равную ГΔ, и проделаем то же самое: проведём круг с центром A и раствором AZ и отнимем от AB линию, равную AZ, то есть равную ГΔ.



Если же ГΔ и AB пересекаются, проведём круг AZ с центром B и раствором BA, соединим BГ и продолжим до Z. Поскольку [232] две прямые BZ и ГΔ не равны, и ГΔ делит своим концом BZ, возможно отнять равную ГΔ от BZ, или равную BZ

этой задаче вообще нужно рассматривать разные случаи, если откладывание меньшей прямой от конца большей сводит всё к одному общему случаю. Впрочем, именно об этом говорится в конце комментария к данной задаче.

от ΓΔ; ведь оба случая уже показаны. Следовательно, возможно отнять или равную ΓΔ от AB, или равную AB от ΓΔ. Ведь AB и BZ равны между собой.

Приняв это разделение, мы показали многообразие случаев. Доказательство автора *Начал* удивительно: ведь оно охватывает все эти построения. Ибо для любого положения возможно от конца большей прямой отложить прямую, равную меньшей, и начертить круг с центром в этом конце и раствором в отложенную прямую, и он отнимет от большей линию, равную меньшей, [233] будь то они пересекаются между собой, или одна сечёт другую, или они расположены как-нибудь иначе.

IV. Если в двух треугольниках две стороны соответственно равны двум сторонам, и углы, охваченные равными сторонами, тоже равны, то и основание равно основанию, треугольник равен треугольнику, и оставшиеся углы равны оставшимся углам, а именно, те, которые стянуты равными сторонами.

Это первая теорема, которую мы встречаем в *Началах*. Все предложения до неё были задачами, первая – про построение треугольников, во второй и третей предлагалось найти прямую, равную другой прямой, и в одной строилась прямая, равная данной, в другой равная вычиталась из неравной. И сейчас, поскольку равенство служит первым признаком количества, прилагаемым к треугольникам и прямым, наш геометр вслед за этими задачами рассматривает первую изложенную выше теорему. Ведь если бы он раньше не показал существования треугольников и способ их построения, [234] как бы он стал обсуждать присущие им свойства и равенство их углов и сторон? И как бы он взял стороны, равные сторонам, и прямые, равные прямым, если бы он прежде не разра-

ботал это в задачах и не придумал способ отыскания равных прямых [26]?

Пусть некто скажет про их построение: «Если у двух треугольников есть эти признаки, то у них есть и всё прочее». Но разве не надо спросить прежде всего: «Знаем ли мы в целом, что эти треугольники могут быть построены?» И если говорится, что у двух треугольников две стороны равны двум сторонам и т. д., то не спросит ли кто-нибудь: а возможно ли, чтобы прямые были равны между собой? Ведь имеются такие геометрические виды, где присутствует одно только неравенство, но не бывает равенства. Мы ещё научимся тому, что роговидный угол всегда неравен острому и никогда не бывает равен ему, и полукруговой угол тоже; и что переход от большего к меньшему не всегда проходит через равенство. Чтобы предвосхитить такие возражения, автор *Начал* заранее принял и построение треугольников – общее для всех трёх видов, – и два метода получения равных прямых, из которых первый получает прямую, до того не существовавшую, [235] а второй отрезает её от неравной прямой. И эти задачи естественно предваряют теорему, в которой он показывает, что если в двух треугольниках две стороны соответственно равны двум сторонам, и углы, охваченные равными сторонами, тоже равны, то тогда основание равно основанию, площадь равна площади, и оставшиеся углы равны оставшимся углам.

В треугольниках имеется три искомых элемента и два данных. Во-первых, дано равенство двух сторон двум сторонам (и

[26] Доводы Прокла в комментарии к этому предложению направлены мимо цели: хотя построение отрезка, равного данному, обеспечивается 2-м предложением, всё же построение угла, равного данному, пока что ничем не обеспечено. Так что ниже (237.23) равенство углов определяется по их наложению. Но раз так, что мешало бы аналогичным образом определить и равенство отрезков?

очевидно, что дано также их отношение), во-вторых – равенство углов, охваченных равными сторонами. А искомых три: это равенство основания основанию, треугольника – треугольнику, и оставшихся углов – оставшимся углам. Поскольку возможно, чтобы в треугольниках две стороны были равны двум сторонам, а теорема не была истинной, так как стороны были бы равны не соответственно, а обе обеим, в данных он говорит не просто о равенстве сторон, но что они соответственно равны. Ведь если бы в одном треугольнике одна сторона была в три единицы, а другая в четыре, а в другом треугольнике одна сторона была бы в пять единиц, а другая в две, и охватываемые ими углы были прямыми, то две стороны были бы равны двум сторонам, поскольку и там, и там они равны семи, но один треугольник не был бы равен другому: ведь площадь одного равна шести, а другого – пяти. Причина здесь в том, [236] что стороны не равны каждая каждой. Многие не соблюдают этого при дележе участков и забирают себе бóльшую площадь, а при этом почитаются справедливыми, как выбравшие равное, поскольку периметры участков были равны. Поэтому мы берём стороны равными каждая каждой, и когда автор *Начал* добавляет эти слова, мы знаем, зачем он это делает. И говоря о равенстве данных углов, он добавляет, что они охвачены равными сторонами, чтобы из-за неопределённости речи мы не подумали, что взяты углы при основаниях. Что касается оснований треугольников, то когда ни одна сторона заранее не названа, так обозначается сторона, обращённая к смотрящему; но когда две стороны уже названы, основанием по необходимости называется оставшаяся сторона. И потому автор *Начал*, положив две стороны равными двум сторонам, называет основаниями оставшиеся стороны треугольников.

Два треугольника называются равными, когда равны их площади. Два треугольника с равными периметрами могут иметь неравные площади из-за неравенства углов. Я называю

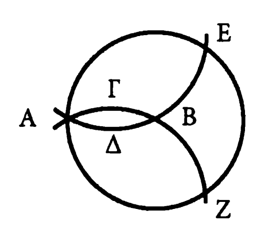
площадью сам участок, взятый между сторонами треугольника, а периметром – линию, составленную из трёх сторон треугольника. Это разные вещи, и треугольники с равными периметрами должны также иметь равными углы при одной стороне, [237] если только площадь равна площади. И иногда получается, что площади равны, а периметры не равны, или что периметры равны, а площади не равны. Рассмотрим два равнобедренных треугольника, и у каждого равные стороны равны пяти единицам, а основание у оного равно восьми, а у другого шести. Неопытный в геометрии человек может сказать, что треугольник с основанием восемь больше, поскольку его периметр равен восемнадцати. Но геометр скажет, что площадь обоих равна двенадцати. И он докажет это, опустив перпендикуляр из вершины каждого треугольника и умножив его длину на половину основания. Возможно также, как я уже сказал, чтобы треугольники с равными периметрами имели неравные участки. И некоторые обманывают своих компаньонов при дележе участков, указывая на равенство периметров и забирая бо́льшую площадь.

Говорят, что основание равно основанию, и в целом прямая равна прямой, когда при совмещении их концов целое совмещается с целым. Всякая прямая совмещается со всякой; а у равных совмещаются и концы. Говорят, что угол равен углу, и прямолинейный – прямолинейному, когда одна охватывающая сторона одного угла наложена на одну сторону другого, [238] и при этом оставшаяся совмещается с оставшейся. Если оставшаяся сторона окажется снаружи оставшейся, тот угол будет больше, у которого оставшаяся сторона будет снаружи, а у которого внутри, тот меньше. И в первом случае один угол охватывает другой, а во втором – охватывается им. Мы принимаем равенство углов по совпадению из сторон, будь то для прямолинейных или для других видов: луновидных, скребковидных, серповидных, – хотя углы могут быть равными без совпадения

сторон. Ведь имеется луновидный угол, равный прямому, хотя невозможно приложить прямую к окружности.

Также надо усвоить, что сторона, лежащая против угла, называется стягивающей. Каждый угол треугольника охвачен двумя сторонами треугольника и стянут оставшейся. Поэтому наш геометр к словам «и углы равны» добавляет «стянутые равными сторонами», чтобы мы не считали безразличным, что один из двух оставшихся углов треугольника случайно берётся равным другому, но называли равными углы, стянутые равными сторонами. И из равных сторон одна стягивает один угол, и другая – оставшийся. Для прояснения теоремы этих предварительных объяснений достаточно.

Для доказательства нужно также предположить, [239] что две прямые не охватывают площади. Наш геометр берёт это по общему признанию. Ведь если концы оснований совпадают, то совпадают и основания, – а иначе две прямые охватывали бы пространство. Откуда известно, что это невозможно? Пусть АГВ и АΔВ – две прямые, охватывающие пространство. Продолжим их неограниченно. С центром В и раствором АВ проведём круг AEZ. Поскольку АГВZ – диаметр, AEZ будет половиной окружности. И опять, поскольку АΔВЕ – диаметр, АЕ будет половиной окружности. Тем самым АЕ равно AEZ, что невозможно. Так что две прямые не охватывают пространства [27].



[27] Это доказательство ничего не доказывает, поскольку Е и Z могут совпадать.

Автор *Начал* усматривает это в первом постулате, когда он говорит, что от всякой точки ко всякой точке можно провести прямую, поскольку предполагается, что две точки всегда соединяет одна прямая, а не две. А окружности, соединяющие две точки, могут идти как по одну сторону, так и по другую. Так концы диаметра соединены двумя [240] дугами, но одной прямой. И возможно начертить внутри и снаружи полукругов бесконечное множество линий, соединяющих данные точки. Причина этого в том, что прямая линия является наименьшей из имеющих те же самые концы. А наименьшее всегда становится единицей и мерой для всего остального. Так и прямой угол, будучи одним, служит мерой для неограниченного множества других углов (и мы находим их с его помощью), и прямая служит мерой для непрямых. И об этом достаточно.

Каждый может видеть, что доказательство этой теоремы зависит от общих понятий и произрастает из ясности предположений. Поскольку две стороны соответственно равны двум сторонам, они совпадают; и поскольку охваченные ими углы равны, они также совпадают. Но раз угол совпадает с углом и стороны со сторонами, тем самым совпадают и концы этих сторон; а потому и основание совпадает с основанием, и три стороны с тремя, и целый треугольник с целым треугольником, и всё со всем. Видимое равенство однородных фигур служит причиной доказательства в целом.

Метод доказательства предложенной теоремы основан на двух аксиомах. Одна из них – что совпадающие при наложении равны между собой. Это – простая истина, не нуждающаяся в доказательстве. [241] Автор *Начал* применяет её к основаниям, площадям и оставшимся углам; он говорит, что они равны, поскольку совпадают. Другая – что равные между собой совпадают при наложении. Эта истина верна не для всех вещей, но только для однородных. Я называю однородными две прямые,

две дуги одного круга, и два сходно охваченных угла. Если их равенство дано, они совпадают друг с другом.

Так что всё доказательство в целом звучит так. Дано, что две стороны равны двум сторонам, и равны охваченные ими углы, а потому они совпадают. А если они совпадают, то совпадают и основание с основанием, и всё со всем. Но раз они совпадают, то тем самым они равны. Ведь если дано, что это равно этому, то и всё равно всему. Это показывает нам первый способ познания всеобщего равенства треугольников. И о доказательстве в целом сказано достаточно.

Карп-механик [28] в своей астрономической работе возобновил разговор о задачах и теоремах, мимо которого можно пройти, а можно и нет. Он говорит, что их порядок не одинаков, но род задач идёт впереди рода теорем, поскольку задачи открывают те предметы, [242] признаки которых затем отыскиваются в теоремах. Предложения задач является простыми, вовсе не требующими технических знаний; нужно лишь произвести нечто понятное – составить равносторонний треугольник, или для данных двух прямых отнять меньшую от большей. И что в этом непонятного или трудного? Но для теорем они являются трудными, требующими множества тонкостей и научного суждения, и зачастую они не изобилуют ясностью и страдают недостатком истины, чего, впрочем, об этой первой теореме не скажешь. Для решения задач существует общий путь анализа, воспользовавшись которым, мы можем достичь результата: ведь им разрешаются даже труднейшие задачи. Но доказательства теорем трудноуловимы и требуют ухищрений; и он говорит, что сегодня никто не может научить общему методу их отыскания. Так что род задач проще, в том числе и из-за своей лёгкости. Произведя эти разделения, он говорит:

[28] О нём см. также 125.25.

«Поэтому задачи в *Началах* предшествуют теоремам. С них начинаются *Начала*, и первая теорема по порядку идёт четвёртой, [243] и не потому, что четвёртая доказывается на их основе, но потому, что хотя ничего из них не требуется для её доказательства, они идут впереди, как задачи, а это теорема. В этой теореме он ссылается исключительно на общие понятия, и таким образом, что один и тот же треугольник берётся лежащим в различных местах. Ведь совмещение, как связанное с ним равенство, обладает всеобщей истиной и очевидностью предварительного восприятия. И тем не менее, хотя доказательство первой теоремы таково, он правильно предпослал ей задачи. Ведь они вообще идут впереди по порядку».

И всё же задачи идут впереди теорем в порядке представления, особенно для тех, что пришёл к теории от искусств, имеющих дело с ощущаемым. Но по достоинству теоремы выше задач. И геометрия в целом, когда она касается различных искусств, действует через задачи; но с первой науке она восходит теоретически – от задач к теоремам, от вторичного к первичному, и от технического к научному. А потому глупо критиковать Гемина, сказавшего, что теоремы совершеннее задач. Сам Карп ставит задачи впереди в порядке доказательства, но Гемин оценивает их совершенство и достоинство. А для в четвёртой теоремы мы объяснили, как она требует предшествующих ей задач, в которых мы учимся строить треугольник и отыскивать равенство.

[244] Нам следует добавить, что это – самая простая и первоначальная теорема. Ведь она доказывается из своей природы с помощью общих понятий. И доказательство свойства треугольников, имеющих две стороны, равные двум сторонам,

и равные охватываемые ими углы, правильно помещено после задач, в которых строятся обладающие этим свойством предметы и данные в целом.

V. В равнобедренных треугольниках углы при основании равны; и если равные прямые продолжить дальше, то и углы под основаниями будут равны.

Одни теоремы являются простыми, другие – составными. Простой я называю такую теорему, предположения и выводы которой неделимы, так что в ней одно данное и одно искомое. Как сказано автором *Начал*: «Во всяком равнобедренном треугольнике углы при основании равны». Составная же теорема состоит из многих, и у неё либо составное предположение при простом выводе, либо составные выводы при простом предположении, либо и то, и другое.

Из составных теорем одни будут сплетёнными, другие – цельными (ἀσύμπλεκτα). Цельной называется такая составная теорема, которую [245] нельзя разделить на простые теоремы. К примеру, в четвёртой теореме составными являются и данные, и выводы, но в ней нельзя разделить данные и получить простые теоремы. Ведь если в треугольниках равны только стороны или только углы при вершине, то следствия не выполняются. Сплётенная же теорема разделяется на простые, к примеру: «Треугольники и параллелограммы под одной высотой относятся друг к другу как их основания». Ведь её возможно разделить, сказав: «Треугольники под одной высотой относятся друг к другу как их основания», и для параллелограммов то же самое.

Из составных теорем одни имеют составные выводы, полученные из простого предположения, в других из составного предположения получается простой вывод, в иных же составными будут и предположение, и вывод. Так в чётвёртой теореме вывод также является составным. Ведь в ней имеются три

заключения: что основания равны, что треугольники равны, и что равны оставшиеся углы, стянутые равными сторонами. А из простого предположения выводится общая теорема для треугольников и параллелограммов, [246] а именно, из того, что они находятся под одной высотой. А и те, и другие будут составными в такой теореме: «Диаметры кругов и эллипсов делят пополам их площади и охватывающие площадь линии».

Из сплетённых теорем одни будут общими, в других же общее выводится из частного [29]. К примеру, если мы скажем, что диаметр делит пополам круг, эллипс и параллелограмм, мы не берём каждое из сплетённых как общее, хотя производим общее для всех заключение. Если же мы скажем: «В круге все прямые, проходящие через центр, делят друг друга пополам, и при этом все сегменты имеют равные углы», мы выскажем общее. Ведь в эллипсе не все сегменты имеют равные углы, но только образованные осями. В целом геометры выставляют такие составные предложения ради краткости и в целях анализа; ведь зачастую несоставное не поддаётся разложению, и только составное легко разлагается на первоначала.

Из сказанного выше следует, что пятая теорема будет составной, причём как в данных, так и в искомых. Автор *Начал* отмечает это, разделяя её, саму по себе одну, надвое, и рассматривая порознь и данные, и искомые. Он говорит: «В равнобедренных треугольниках углы при основании равны», и далее снова: «и при продолжении равных прямых углы под основаниями будут равны». Мы считаем это не двумя теоремами, но одной, составной и в данных, и в искомых. Каждая из её частей завершена и истинна, и анализ [30] для каждой тоже истинен. Ведь если углы при основании равны, треугольник будет равнобедренным; [247] и если углы под основанием равны, то

[29] Ср. Аристотель, *Вторая аналитика* 73a25–74b4.

[30] Т. е. обращение.

продолжатся равные стороны и треугольник будет равнобедренным. Но хотя автор *Начал* впоследствии производит обращение для равных углов при основании, он не делает этого для равных углов под основанием, хотя это тоже истинно. Причину этого исключения мы обсудим ниже[31]; сейчас же мы выясним, зачем он вообще включает в теорему равенство углов под основанием. Ведь он не использует его ни в одном построении или доказательстве задачи или теоремы. Но зачем его тогда вообще включать в теорему? На этот вопрос мы ответим, что даже если он и не пользуется равенством углов под основанием равнобедренного треугольника, тем не менее это полезно для противодействия разрушителям и прекращения нападок. Научная и техническая сноровка состоит в том, чтобы заранее устроить опровержение преграждающих противоречий и заготовить средства для отведения возражений; ведь доказательство может послужить не только утверждению истины, но и опровержению лжи. Отсюда ты можешь понять пользу геометрического порядка для риторики. Тот, кто способен проделать это в своих речах, предвидя возражения, которые могут быть выставлены против его главных положений, и, не дожидаясь этого, [248] приуготовляя в своих предшествующих утверждениях средства для их опровержения, обеспечивает себе лучший метод для победы в споре. Именно это и делает автор *Начал*, стремясь научить нас, кроме самих теорем, тем средствам, с помощью которых мы сможем отвести выставленные против них возражения; поэтому он доказывает и то, что углы под основанием равнобедренного треугольника равны, приуготовляя опровержения для ложных нападок[32]. Это прояснится, когда

[31] См. 248.11 и 258.14.

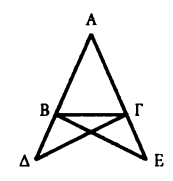
[32] Это предположение Прокла совершенно произвольно. Скорее, Евклид получает этот результат по ходу дела, доказывая теорему об углах при основании равнобедренного треугольника.

мы разрушим возражения против седьмой и девятой теорем. По этой же причине шестая теорема не содержит обращения этой части, не используемой в дальнейшем, но лишь по сопричастности завершающей для нас целостность знания.

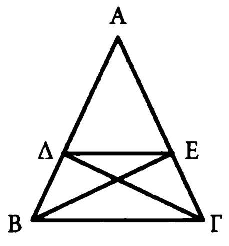
Если кто-нибудь потребует, чтобы мы доказали равенство углов при основании равнобедренного треугольника без продолжения сторон [33] – ведь их равенство должно доказываться и без углов под основанием, – мы изменим построение и докажем предложенное, поместив внешние углы внутри треугольника.

Пусть АВГ – равнобедренный треугольник. Возьмём на АВ произвольную точку Δ, отложим на АГ отрезок АЕ, равный АΔ, и соединим ВЕ, ΔГ, ΔЕ. [249] Поскольку АВ равна АГ, АΔ равна АЕ и угол А – общий, тем самым ВЕ равна ΔГ, и оставшиеся углы равны оставшимся, а именно угол АВЕ равен углу АГΔ. И опять, поскольку ΔВ равна ЕГ, ВЕ равна ΔГ, и угол ΔВЕ равен углу ЕГΔ, и ΔЕ – общее основание, то и всё равно всему, так что угол ЕΔВ равен углу ΔЕГ, и угол ΔЕВ равен углу ЕΔГ. Но поскольку угол ЕΔВ равен углу ΔЕГ, когда из них вычитаются равные углы ЕΔГ и ΔЕВ, то и остав-

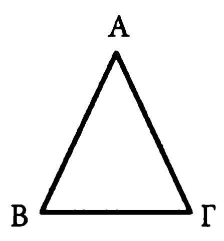
[33] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть АВГ – равнобедренный треугольник с основанием ВГ. Продолжим боковые стороны за основание на равные отрезки ВΔ и ГЕ, и соединим ВЕ и ГΔ. Треугольник АΔГ равен треугольнику АВЕ по первому признаку. Тем самым ΔГ равна ВЕ, и угол ВΔГ равен углу ГЕВ. Тогда и треугольник ВΔГ равен треугольнику ГЕВ по первому признаку. Тем самым угол ΔВГ равен углу ЕГВ. Но тогда и угол АВГ равен углу АГВ, поскольку эти углы дополняют равные углы до двух прямых углов.



шиеся углы ВΔΓ и ΓΕΒ будут равны. Но стороны ВΔ и ΔΓ соответственно равны сторонам ΓΕ и ЕВ, и ВΓ – общее основание, так что всё равно всему, а потому и оставшиеся углы, стянутые равными сторонами, тоже равны. Тем самым угол ΔВΓ равен углу ЕΓВ: ведь ΔВΓ стянут стороной ΔΓ, и ЕΓВ стянут стороной ЕВ. Тем самым углы при основании равнобедренного треугольника равны, даже если равные прямые не продолжать вовне.



Папп предложил более короткое доказательство, не требующее дополнительных построений. Пусть АВΓ – [250] равнобедренный треугольник, и АВ равна АΓ. Будем думать об одном треугольнике как о двух, и скажем следующее: поскольку АВ равна АΓ и АΓ равна АВ, две стороны АВ и АΓ равны двум сторонам АΓ и АВ, и угол ВАΓ равен углу ΓАВ (ведь это один и тот же угол); тем самым всё равно всему, и ВΓ равна ΓВ, треугольник АВΓ равен треугольнику АΓВ, и угол АВΓ равен углу АΓВ, а угол АΓВ равен углу АВΓ, ведь эти углы стянуты равными сторонами АВ и АΓ. Тем самым углы при основании равнобедренного треугольника равны. Похоже, что он открыл этот способ доказательства, когда заметил, что автор *Начал* в четвёртой теореме соединяет два треугольника так, что они совпадают друг с другом, делая из двух один и полагая их равными во всём. И мы также можем теоретически усмотреть два треугольника в одном и доказать равенство углов при основании.



Открытием многих теорем, в том числе и этой, мы обязаны древнему Фалесу. Как сообщают, он первым установил и заявил, что углы при основании равнобедренного треугольника [251] равны, причём он на древний манер называл равные (ἴσας) углы подобными (ὁμοίας). Но ещё больше мы должны восхищаться новыми геометрами (и один из них – это Гемин), доказавшими нечто более общее, а именно, что равные прямые линии, падающие из одной точки на подобочастную линию, образуют с ней равные углы, – и когда основанием служит прямая, либо окружность, либо цилиндрическая спираль, углы при этом основании будут равны. Гемин использовал эту теорему, чтобы доказать, что существуют только три подобочастных линии, и не больше, – и таковы прямая, окружность и цилиндрическая спираль. И это – подлинная общность, к которой относится данный признак, так же как и свойство каждого треугольника иметь два угла, бóльшие оставшегося, как будет показано ниже. Так что равенство углов при основании будет общим не для равнобедренных треугольников, хотя все они таковы, но для прямых, падающих на подобочастную линию. Ведь равенство стянутых ими углов первично присуще именно им.

VI. Если в треугольнике два угла равны, то и стороны, стягивающие равные углы, будут равными.

Это первая теорема, содержащая обращение и сведение к невозможному. Ведь она обратна предыдущей теореме, [252] и доказывается сведением к невозможному. Нам следует

разъяснить как то, так и другое, поскольку они относятся к нашим делам.

Геометры говорят об обращении в первом и главном смысле, когда две теоремы меняются своими заключениями и предположениями, так что заключение первой становится предположением второй, а предположение – заключением. К примеру, «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны» (здесь предположение – равнобедренный треугольник, а заключение – равенство углов при основании), и «Треугольники с равными углами при основании являются равнобедренными». Именно это утверждает шестая теорема, взяв за предположение равенство углов при основании, а за заключение – равенство сторон, стягивающих равные стороны.

При ином обращении производится только перестановка частей. Если в составной теореме заключение получается из нескольких начальных предположений, мы берём заключение и одно предположение и получаем из них заключение, состоящее из одного или нескольких предположений. И таким образом восьмая теорема [253] обратна четвёртой. Та говорит, что если стороны и углы равны, то и стягивающие основания равны; эта же утверждает, что равные стороны, лежащие на равных основаниях, охватывают равные углы. И здесь равенство оснований было заключением предыдущей теоремы, а равенство сторон – одним из предположений.

Из этих двух обращений первое является однородным и определённым, а второе – множественным и приводящим ко многочисленным теоремам; ведь здесь имеется не одно обращение, но многие, по причине множественности предположений составной теоремы. Впрочем, мы часто можем произвести только одно обращение теоремы, содержащей два или больше начальных предположений, когда не все предположения определены, но среди них имеются неопределённые.

Следует также отметить, что многие обращения являются ложными и не являются верными обращениями. К примеру, всякое шестиугольное число будет треугольным, но не истинно, что всякое треугольное число будет шестиугольным.[34] Причина здесь в том, что одно является более общим, а другое – более частным, [254] и утверждение всегда верно только для одного из них. Однако утверждения о первичных свойствах, которые берутся сами по себе, могут быть обращены. Эти вопросы привлекали внимание математиков из круга Менехма и Амфинома.

Среди обращённых теорем одни называются ведущими (προηγούμενα), другие обратными. О ведущей теореме говорят, когда мы основываем род и доказываем его свойства; когда же, наоборот, мы берём свойства за предположения и делаем заключения о роде, такая теорема получается обращением ведущей. «Во всяком равнобедренном треугольнике углы при основании равны», – это ведущая теорема, поскольку её предположение является ведущим по природе (я говорю о равнобедренном треугольнике); но «всякий треугольник, в котором равны углы, имеет равные стягивающие стороны и является равнобедренным», – это обратная теорема. Ведь она заменяет предмет на его свойство, берёт это свойство за предположение и основывает на нём доказательство. И о геометрическом обращении сказано достаточно.

Хотя сведение к невозможному всегда приводит к явно невозможному итогу, к противоречию с общепризнанным, это противоречие иногда возникает с общими понятиями, постулатами

[34] Треугольные числа 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, … получаются последовательным сложением натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, … , начиная с единицы; шестиугольные числа 1, 6, 15, 28, 45, … получаются последовательным сложением членов арифметической прогрессии 1, 5, 9, 13, 17, … , начинающейся с единицы и имеющей разность 4.

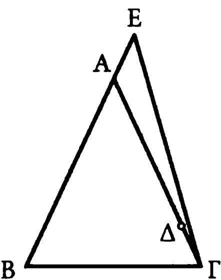
или определениями, а иногда – с чем-то уже доказанным. Шестая [255] теорема показывает невозможность следствий, ибо они противоречат общему понятию, утверждающему, что целое больше части.[35] А в восьмой теореме невозможность заключена в противоречии не с общим понятием, но с доказанным в седьмой теореме. Ведь те, кто не согласен с искомым в восьмой теореме, вынуждены принять отрицание седьмой теоремы.

Всякое сведение к невозможному сперва предполагает противоречащее искомому, а затем приводит его к тому, что по общему признанию не имеет места, чем отвергается предположенное и подтверждается начальное искомое. В целом нам следует понимать, что всякая математическая уверенность направлена или от начал, или к началам, как где-то говорит Порфирий. Направленное от начал бывает двояким, и случается, что оно исходит или из общих понятий, то есть из одной лишь самоочевидности, или из доказанного прежде. Направленное к началам либо устанавливает начала, либо уничтожает их. Установление начал называется анализом, и ему противоположен синтез (ведь от начал можно вернуться назад к искомому, и это называется синтезом); а их разрушение называется сведением к невозможному, ведь цель этого средства состоит в том, чтобы получить противоречие с общепризнанным и очевидным. Здесь имеется некий силлогизм, [256] но не такой, как в анализе. Ведь сведение к невозможному составляется по второму предположению.[36] К примеру, если в треугольниках с равными углами стороны, стягивающие равные углы, не равны, целое оказывается равным части; но это невозможно; следовательно, в треугольниках с равными углами стороны, стягивающие равные углы, будут равными. И о сведении к невозможному сказано достаточно.

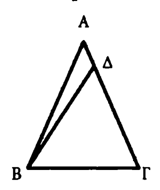
[35] См. 256.15.

[36] Ср. Аристотель, *Первая аналитика* 62a20.

Как мы уже сказали, автор *Начал* пользуется обращением в предложении теоремы, когда заключения пятой теоремы он берёт за данные, а данные – за искомое; а сведением к невозможному он пользуется в построении и доказательстве.[37] Если допустить, что при отнятии от АГ отрезка, равного АВ, мы отрежем его не с конца Г, но с конца А, то при этом предположении мы придём к той же невозможности. Пусть АΔ равна АВ. Продолжим ВА, и пусть АЕ равна ΔГ. Тогда и ВЕ в целом равна АГ. Соединим ЕГ. Теперь сторона АГ равна ВЕ, а ВГ – общая, две стороны равны двум, и угол при В равен углу АГВ по условию. И всё равно всему [257] по четвёртой теореме, так что треугольник ЕВГ равен треугольнику АВГ, целое равно части, что невозможно.

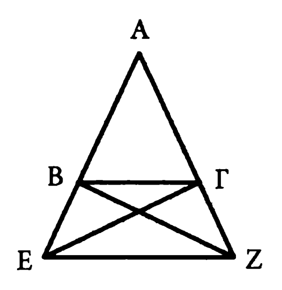


[37] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть в треугольнике АВГ угол АВГ равен углу АГВ. Допустим, что АВ не равна АГ, но короче её. Отложим на АГ отрезок ГΔ, равный АВ, и соединим ВΔ. Сторона ГΔ равна стороне АВ, сторона ВГ – общая, и угол при Г равен углу АВГ по условию. Тогда по четвёртой теореме треугольник ΔГВ равен треугольнику АВГ, целое равно части, что невозможно. Следовательно, допущенное неверно, и тем самым АВ равна ВГ.



Это прояснено, и теперь осталось доказать оставшееся обращение. Ведь в шестой теореме автор *Начал* обратил лишь часть от целого пятой. Нам же следует добавить оставшееся обращение. Это получится, если мы возьмём за предположение, что углы под основанием равны, и докажем, что треугольник равнобедренный.

Пусть в треугольнике АВГ продолжены стороны АВ и АГ, и углы под основанием равны. Я утверждаю, что треугольник АВГ – равнобедренный. Пусть на АЕ взята точка Е, и ВЕ равна ГZ, и соединены ЕГ, BZ, EZ. И вот сторона ВЕ равна стороне ГZ, сторона ВГ – общая, две равны двум, и угол ЕВГ равен углу ZГВ, поскольку это углы под основанием, и по четвёртой теореме всё равно всему. Так что основание ЕГ равно основанию ZB, угол ВЕГ равен углу ГZB, и угол ГВZ [258] равен углу ВГЕ, поскольку они стянуты равными сторонами. Теперь целый угол ЕВГ равен целому углу ZГВ, часть ZВГ равна части ЕГВ, так что и остаток ЕВZ равен остатку ZГЕ. И вот ВЕ равна ГZ, и BZ равна ЕГ, и они охватывают равные углы, так что всё равно всему, и тем самым угол ВЕZ равен углу ГZЕ. Но тем самым АЕ равна АZ по доказанной шестой теореме. И если от них отнять равные ВЕ и ГZ, то будут равны и остатки АВ и АГ. Тем самым треугольник АВГ – равнобедренный. Так что если треугольник имеет два равных угла, он будет равнобедренным; и если при продолжении сторон два угла под основанием будут равными, данный треугольник тоже будет равнобедренным.



Но какова причина, по которой автор *Начал* не обращает оставшуюся часть? Не потому ли, что для пятой теоремы равенство углов под основанием [259] является побочным следствием, взятым ради разрешения затруднений? Ведь то, что при равенстве углов под основанием треугольник будет равнобедренным, не связано ни к ведущим доказательством, ни с разрешением других вопросов. Кроме того, это вытекает из одной из следующих теорем, на основе которой можно показать, что при равенстве углов под основанием треугольник будет равнобедренным. Поскольку всякая прямая, поставленная на другую прямую, образует два угла, равные двум прямым, тем самым при равенстве углов под основанием будут равны и углы над основанием, а потому будут равны и стягивающие их стороны. Пользуясь этим по ходу дела, автор *Начал* смог бы заключить, что при равенстве углов под основанием треугольник будет равнобедренным, если бы это потребовалось ему в доказательстве какой-нибудь теоремы. Ведь далее явно доказывается, что когда прямая, установленная на прямую, образует с ней два угла, они будут или прямыми, или равными двум прямым [38]. Предыдущие теоремы не нуждаются в названном обращении, а последующие, если потребуется, будут доказаны на этой основе.

VII. Если на одной и той же прямой установлены две прямые, то на ней не могут быть установлены две другие прямые, чтобы они были соответственно равными и встречались в разных точках по ту же самую сторону, имея те же самые концы, что и исходные прямые.

Эта теорема имеет редкий характер, не часто встречающийся в научных предложениях. Ведь она оформлена отрица-

[38] Предложение I.13.

тельно, а не утвердительно, что бывает не так часто. Во всяком случае, многие предложения геометрических и арифметических теорем являются утвердительными. Причина этого, как говорит [260] Аристотель [39], заключается в том, что общие утвердительные предложения лучше подходят для науки, как довлеющие самим себе, и они не нуждаются в отрицательных добавлениях, тогда как общие отрицательные предложения нуждаются в утвердительных при их доказательстве. Ведь без утвердительного нет ни доказательства, не силлогизма; и поэтому научные доказательства чаще бывают утвердительными, а отрицательные заключения используются редко.

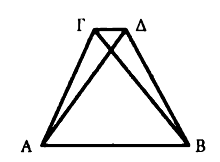
Предложение этой теоремы является удивительно точным и полным, основанным на многих утверждениях, которые делают его нерушимым и неоспоримым для нападок. Первым делом он говорит «на одной и той же прямой», чтобы никто не сказал, что на другой прямой установлены две прямые, соответственно равные, а тем самым взятое предложение является паралогизмом. Далее, взяв одну прямую линию, он не говорит, что две установленные на ней прямые просто равны двум (ведь это возможно), но добавляет: «соответственно». Что удивительного в том, если мы возьмём обе установленные прямые равные обеим, но при этом одна будет длиннее, а другая короче? Но выражение «соответственно» делает это невозможным. [261] В-третьих, он добавляет «встречались бы в разных точках». Ведь если бы уже имелись две прямые, и к каждой из них была бы приложена равная ей прямая, то разве и уже имевшиеся прямые, и вновь построенные не сходились бы к одной и той же точке? Ведь если прямые равны, их концы всегда совпадают. В-четвёртых, «по ту же самую сторону». Разве мы не можем на одной имеющейся прямой построить одни прямые по одну

[39] Аристотель, *Вторая аналитика* 79a17–32.

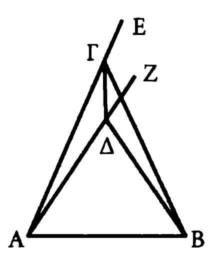
сторону от неё, а другие – по другую так, чтобы эта прямая была общим основанием двух треугольников с противоположными вершинами? Чтобы нас не постигло такое разочарование, автор *Начал* добавляет: «по ту же самую сторону». В-пятых, он добавляет: «имея те же самые концы, что и исходные прямые». Ведь возможно на одной прямой построить две прямые, соответственно равные двум прямым, чтобы они встречались в разных точках по одну сторону, используя всю прямую и строя на ней две, если только две построенные прямые имеют не те же концы, что и две данные, но другие. Если мы представим две диагонали квадрата на одной его стороне, две линии будут равны двум: сторона и диагональ, а также параллельная сторона и другая диагональ, – но равные не имеют здесь одни и те же концы. Ведь ни параллельные, ни диагонали не заканчиваются между собой одинаково, хотя они и равны. [262] Если мы осмотрим все эти ограничения, предложенное будет верным, и доказательство – силлогистически безупречным[40].

Но пусть некто, вопреки всем научным разграничениям, попробует сказать, что невозможное, о котором говорит наш геометр, всё же возможно. Пусть на прямой АВ внутри двух

[40] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть в треугольниках АГВ и АΔВ стороны, построены на общем основании АВ, попарно – равны, а вершины Г и Δ – различны. Тогда треугольники АГΔ и ВГΔ – равнобедренные. Тем самым угол АГΔ равен углу АΔГ, и угол ВГΔ равен углу ВΔГ. Но угол АГΔ больше угла ВГΔ, угол ВΔГ больше угла АΔГ, поэтому угол АГΔ больше угла АΔГ, что невозможно.



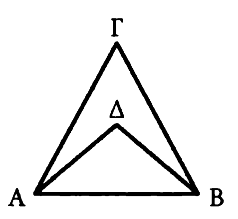
прямых АГ и ВГ построены равные им прямые АΔ и ВΔ, так что они встречаются в разных точках Г и Δ и имеют одинаковые концы А и В с исходными прямыми, так что АГ равна АΔ, и ВГ равна ВΔ. Возражающим так мы ответим, соединив ΔГ и продолжив АГ и АΔ. Из этого построения ясно, что треугольник АГΔ – равнобедренный, поскольку АΔ равна АГ по предположению. И углы ЕГΔ и ZΔГ под основанием равны. Угол ВΔГ больше угла ZΔГ, [263] и более того, угол ВΔГ больше ВГΔ. Но поскольку ΔВ равна ГВ, углы ВΔГ и ВГΔ при основании равны, так что один и тот же и больше, и равен, что невозможно.



Комментируя пятую теорему, мы говорили, что равенство углов под основанием может оказаться полезным если не для доказательства последующих теорем, то для разрешения выставленных против них возражений. Сейчас мы отвели возражение, воспользовавшись тем, что при равенстве сторон АГ и ВГ равны и углы ЕГΔ и ZΔГ. Очевидно, что мы можем так же разрушать преграды, выставленные против других теорем.

Но если кто-то скажет: «Пусть на прямой АВ взяты ВΔ и ВГ, равные АГ и АΔ, причём ВГ равна АГ, и ВΔ равна АΔ, и вот они встречаются в разных точках А и В, и имеют те же самые концы Г и Δ с исходными прямыми АГ и АΔ», – что мы на это ответим? Должны ли соединяться на прямой АВ и исходные прямые, и равные им прямые? Разве не об этом говорит автор *Начал* в своём предложении? Однако прямые АГ и АΔ [264] не установлены на прямой АВ; они сходятся в точке, находящейся

на прямой AB, но не установлены на ней. Так что линии, находящиеся на прямой AB, то есть АГ и ГВ, АΔ и ΔВ, отличны от исходных линий и равных им; равными же должны быть линии, установленные на AB. Об ответе на этот вопрос достаточно.



Ясно, что эта теорема доказывается автором *Начал* путём сведения к невозможному, и что невозможное противоречит общим понятиям, а именно тому, что целое больше части, и что быть одновременно бóльшим и равным невозможно. И похоже, что эта теорема служит леммой, подготовленной для восьмой теоремы. Ведь она входит в её доказательство, и не является ни простым элементом, ни чем-то элементарным. И она не используется повсюду. Ведь наш геометр пользуется ей очень ограниченно.

[265] VIII. Если в двух треугольниках равны две стороны, каждая каждой, и основание равно основанию, то будут равны и углы, охватываемые равными прямыми.

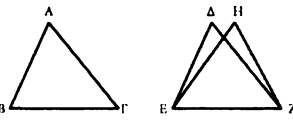
Восьмая теорема обратна четвёртой, но не ведущим обращением (ведь она не делает предположение в целом заключением, и заключение в целом предположением): она связывает предположение четвёртой теоремы с заключением и доказывает одну часть данного. «Две стороны равны двум сторонам» – это предположение обеих теорем; но то, что основание равно основанию, для той было заключением, а для этой – тем, что дано. А равенство углов в той теореме было дано, а в этой явля-

ется искомым. И обращение производится перестановкой только этих данных и искомых.

Если кто-нибудь захочет узнать причину того, почему она стоит восьмой, а не сразу за четвёртой как обратная к ней, подобно тому как за пятой идёт обратная к ней шестая (ведь обратные теоремы по большей части идут за ведущими и доказываются непосредственно после них), мы скажем, что восьмая теорема нуждается в седьмой. Ведь она доказывается сведением к невозможному. [266] И эта невозможность включает в себя нечто такое, что мы узнаём из седьмой теоремы. А та, в свою очередь, нуждается для доказательства в пятой. А потому седьмая и пятая теоремы необходимо стоят впереди той, которая доказывается сейчас. И поскольку обращение пятой легко доказывается из первых начал, оно по праву стоит сразу после пятой, – и из-за их родства, и из-за того, что сведение к невозможному показывается через противоречие с общими понятиями, а не с другой теоремой, как в восьмой. Проще усвоить противоречие с общими понятиями, нежели с теоремами. Ведь последние ухватываются доказательством, тогда как познание первых выше доказательства.

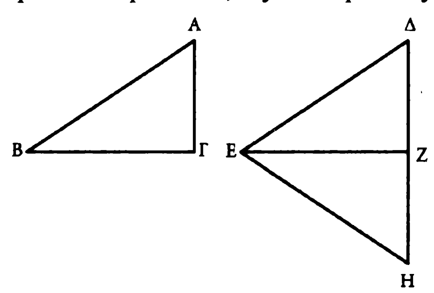
Автор *Начал* доказывает предложенное с помощью уже доказанной седьмой теоремы [41]. А последователи Филона [42] го-

[41] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть в треугольниках ΑΒΓ и ΔΕΖ стороны попарно равны. Наложим ΑΒΓ на ΔΕΖ так, чтобы точка Β совпала с точкой Ε, основание ΒΓ совпало с основанием ΕΖ, и треугольники лежали по одну сторону от общего основания. Точка Α по седьмой теореме не может не совпасть с точкой Δ. Но раз они совпадают, то совпадут и соответственные стороны, а тем самым соответственные углы окажутся равными.

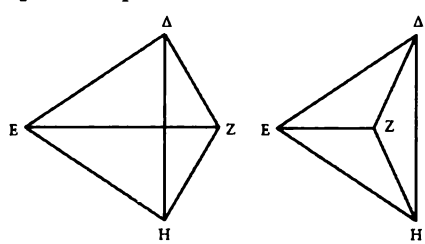


[42] Филон Византийский, II в. до н. э.

ворят, что её можно доказать без помощи седьмой. Предположим, что два треугольника АВГ и ΔEZ имеют соответственно равные стороны и равные основания ВГ и EZ. Приложим основание к основанию и расположим [267] треугольники АВГ и ΔEZ во одной плоскости, но не по одну сторону от основания, а по разные стороны от прямой EZ, чтобы их вершины оказались противоположными. Вместо АВГ обозначим приложенный треугольник EZH, где ΔE равна EH, и ΔZ равна ZH. При этом ZH будет лежать или на одной прямой с ΔZ, или нет, и если не на одной прямой, то образованный ими угол будет направлен или вовнутрь, или вовне. Допустим сначала, что они лежат на одной прямой. Поскольку ΔE равна HE, и ΔZH –одна прямая, треугольник ΔEH будет равнобедренным, и угол Δ равен углу H.



Если же ΔZ и ZH не лежат на одной прямой, пусть они лежат углом наружу. Соединим ΔH. И вот ΔE равна HE, и ΔH – основание, так что угол EΔH равен углу EHΔ. И опять, ΔZ равна HZ, и ΔH – основание, так что угол ZΔH равен углу ZHΔ. Но угол EΔH равен углу EHΔ, а потому и в целом угол EΔZ равен углу EHZ, [268] что и требовалось показать.



В третьем случае, пусть ΔZ и ZH лежат углом внутрь. Соединим ΔH. И вот ΔE равна HE, и ΔH – основание, так что угол EΔH равен углу EHΔ. И опять, ΔZ равна HZ, и ΔH – основание, так что угол ZΔH равен углу ZHΔ. Но углы EΔH и EHΔ в целом равны между собой, так что равны и оставшиеся углы EΔZ и EHZ. И мы нашли предложенное, доказав теорему для всех положений прямой ZH, и нигде не воспользовавшись седьмой теоремой. Раз так, не ввёл ли автор *Начал* её избыточно? Ведь она введена только ради восьмой, и если восьмая доказывается без неё, не будет ли седьмая бесцельной?

На это нам следует повторить вслед за другими, что седьмое доказательство имеет величайшую пользу в делах астрономии, связанных с затмениями. Ведь говорят, что с её помощью показывается, что три последовательных затмения не могут [269] происходить через равные промежутки времени, а именно, так, чтобы время от первого до второго равнялось времени от второго до третьего. К примеру, если второе произошло через шесть месяцев и двенадцать дней после первого, промежуток времени от второго до третьего не может быть таким же, но будет больше или меньше. И это доказывается с помощью седьмой теоремы. И это не единственная теорема, которую автор *Начал* доказывает для нас в том числе и из-за её вклада в астрономию, но также и многие другие теоремы и задачи. Такова последняя задача в четвёртой книге, в которой сторона пятнадцатиугольника вписывается в круг: ради чего он предлагает её, как не ради её применения в астрономии? Ведь вписав пятнадцатиугольник в проходящий через полюса круг, мы получаем расстояние между полюсами равноденствия и зодиака, поскольку они отделены друг от друга стороной пятнадцатиугольника. Похоже, что автор *Начал*, глядя на астрономию, заранее доказал для нас многое, приуготовляющее эту науку. И видя, что седьмая доказывается из пятой, и приуготовляет не требующее рассмотрения случаев доказательство восьмой,

он ввёл её в этот порядок; и хотя Филон сделал прекрасный бросок, многообразие случаев не подходит для сочинения о началах. Но по этому вопросу сказано достаточно.

Если кто-нибудь спросит, почему он не включил в восьмую теорему другие детали из четвёртой, а именно, равенство треугольников и оставшихся углов, [270] мы ответим, что когда равенство углов при вершине доказано, все прочие равенства следуют из четвёртой теоремы. Таким образом, нужно доказать независимо только это равенство, а прочее берётся как следствие.

И похоже, что равенство углов при вершине создаётся как равенством охватывающих сторон, так и равенством оснований. Ведь когда основания не равны, углы не остаются теми же самыми, хотя охватывающие стороны предполагаются равными, но при увеличении или уменьшении основания угол также увеличивается или уменьшается. И когда основания остаются теми же самыми, но стороны делаются неравными, углы опять не остаются теми же самыми, но увеличиваются при уменьшении или уменьшаются при увеличении. Ведь изменение углов обратно изменению охватывающих сторон [43]. Представь себе стороны, падающие на одно и то же основание. Если ты их увеличишь, охватываемый ими угол уменьшится. Но если ты вытянешь их и увеличишь, тем самым ты уменьшишь охватываемый ими угол. Ведь если они встретятся на большем удалении, их вершина будет дальше отстоять от основания. Так что, как сказано, равенство углов при вершине определяется как равенством охватывающих сторон, так и равенством оснований.

[43] Это утверждение в общем случае неверно.

[271] IX. Данный прямолинейный угол разделить пополам.

Он перемешивает теоремы с задачами и связывает задачи с теоремами, в итоге получая из тех и других цельную книгу о началах – то выставляя предметы, то созерцая их свойства. Показав в предыдущих теоремах, что в одиночном треугольнике равенство сторон вызывает равенство углов и наоборот, и проделав это же для двух треугольников (за исключением того, что способ обращения для одного и для двух треугольников различен), он возвращается к задачам и предписывает разделить пополам данный прямолинейный угол. Ясно, что угол здесь задан по виду. Ведь он назван прямолинейным, а не случайным. Деление пополам произвольных углов не является предметом сочинения о началах, ибо является спорным, всякий ли угол можно разделить пополам. Например, сомнительно, можно ли разделить пополам роговидный угол.

Нужно также задать отношение сечения, что тоже понятно. Ведь деление угла в произвольном отношении – например на три, четыре или пять частей – выходит за рамки принятых в нём построений. Чуть позднее мы сможем разделить прямой угол на три части, применяя последующие теоремы, – но мы не можем разделить на три части острый угол без других линий, [272] смешанных по виду. Это показано теми, кто занимался задачей о трисекции данного прямолинейного угла. Никомед воспользовался для этого конхоидальной линией, и он учит нас её порождению, порядку и признакам, будучи открывателем её особенностей[44]; и с её помощью он делит всякий прямолинейный угол на три части. Другие осуществляли

[44] См. комм. к 111.8. О применении конхоиды для трисекции угла пишет Папп в *Собрании* (IV, 26).

это при посредстве квадратрис Гиппия[45] и Никомеда[46], и они тоже пользовались смешанными линиями – квадратрисами. Иные же начали со спиралей Архимеда[47] и разделили данный прямолинейный угол в данном отношении. Начинающему трудно следить за их мыслями, так что мы проследуем мимо них. Пожалуй, их будет уместнее рассмотреть в третьей книге *Начал*, где данная дуга окружности делится пополам[48]. Ведь там один и тот же метод разыскания применяется не только к делению пополам, но и к делению на три части, и бросок делается при посредстве тех же самых линий, с помощью которых древние производили деление дуги окружности на три равные части[49]. И естественно, что он упоминает только о прямых и окружностях, поскольку виды, составленные из них смешением, крайне сложны и трудно исчислимы; а потому, чтобы не заниматься чужими делами, он проходит мимо всех вопросов, связанных с использованием смешанных линий, [273] и выставляет для исследования только первейшие и простейшие виды, которые может построить и теоретически рассмотреть с их помощью.

К ним относится и предложенная сейчас задача разделить пополам данный прямолинейный угол. В её построении он использует один постулат, а также первое и третье предложения, а в доказательстве – только восьмую теорему. Ведь задачи всегда требуют доказательства, как мы сказали выше, и от него они приобретают свою научный характер.

[45] О Гиппии см. комм. к 65.14.

[46] Конхоида Никомеда может быть применена также и для решения задачи о квадратуре круга, поэтому Папп называет её квадратрисой.

[47] Архимед, *О спиралях*.

[48] Предложение III.30.

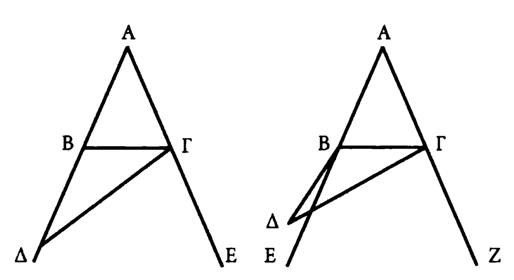
[49] Возможно, здесь говорится не о самой III книге (в которой трисекция угла не обсуждается), но о каком-то комментарии к ней.

Некоторые могут возразить нашему геометру, что построенный равносторонний треугольник, о котором он говорит [50], может иметь вершину не между двух прямых, но на одной из них или вне обеих; однако сказанное ясно из *Начал*.

Пусть требуется разделить пополам угол ВАГ. Возьмём на АВ точку В, и пусть ВА равна ГА; соединим ВГ и построим на ней равносторонний треугольник ВГΔ. Точка Δ лежит или между прямыми АВ и АГ, или на АВ, или на АГ, или вне обеих. Автор *Начал* берёт её лежащей внутри, и они препятствуют этому и связывают доказательство, говоря, что она может лежать и на одной из прямых [274] или вне обеих.

Допустим, что Δ лежит на АВ, и пусть будет равносторонний треугольник ВГΔ. Но ΔВ равна ΔГ, и равны углы при основании ГВΔ и ВГΔ, а потому весь угол ВГЕ больше угла ГВΔ. Но опять, ВА равна ГА, треугольник АВГ – равнобедренный, и углы под основанием ВГ равны. Тем самым угол ВГЕ равен углу ГВΔ. Но он больше, что невозможно. Это происходит, если вершина равностороннего треугольника лежит на прямой АВΔ. Схожее доказательство мы дадим, если она лежит на АГЕ.

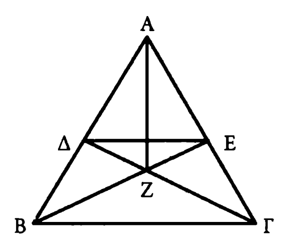
[50] Евклид решает эту задачу так. Отложим на сторонах угла ВАГ равные отрезки АВ и АГ, соединим ВГ и построим на ней равносторонний треугольник ВГΔ с вершиной Δ по другую сторону от ВГ, нежели А. Проведём АΔ; она и будет биссектрисой. В самом деле, треугольники ВАΔ и ГАΔ равны по трём сторонам. Но тогда угол ВАΔ равен углу ГАΔ.



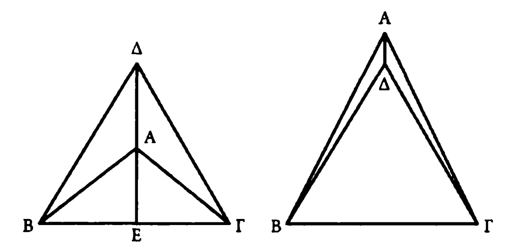
Допустим, что она может лежать вне обеих прямых. Поскольку ВΔ равна ГΔ, равны и углы при основании ВГΔ и ГВΔ. Так что угол ВГΔ больше угла ГВЕ, и тем более угол ВГZ больше угла ГВЕ. Но они равны, как находящиеся под основанием ВГ равнобедренного треугольника АВГ; а это невозможно. Следовательно, точка Δ не может лежать по эту сторону вне двух прямых. Схожим образом докажем, что она не лежит и по другую сторону от них. Ты видишь, что мы опять отвели возражения, [275] воспользовавшись равенством углов под основанием равнобедренного треугольника. Мы уже говорили, что с помощью этой теоремы удаётся показывать несостоятельность многих возражений против нашей науки; и наш геометр опять извлёк пользу из неё.

Если кто-то скажет, что под основанием ВГ может не хватить места, мы построим равносторонний треугольник по ту же сторону, что и ВА и АГ. В этом случае по необходимости построенные стороны или совпадают с ВА и АГ, если эти прямые сами равны ВГ; либо они попадают наружу, если ВА и АГ короче ВГ, либо внутрь, если ВА и АГ длиннее ВГ. Пусть они сперва совпадают, и треугольник ВАГ – сам равнобедренный. Отметим на АВ точку Δ, на АГ отложим АЕ, равную АΔ, и соединим ΔЕ, ВЕ, ГΔ, АZ. Поскольку АВ равна АГ, и АΔ равна АЕ, две стороны ВА и АЕ равны двум сторонам ГА и АΔ, и они охватывают один и тот же угол, так что всё равно всему, и угол ΔВЕ равен углу ЕГΔ. И поскольку ΔВ равна ЕГ и ВЕ равна ГΔ, [276] [а основание ВГ – общее], всё равно всему, и угол ΔЕВ

равен углу ЕΔГ, так как они стянуты равными сторонами. Тем самым ΔZ равна EZ по шестой теореме. И поскольку АЕ равна АΔ, и AZ – общая, и ΔZ равна EZ, тем самым угол ΔАЕ разделен пополам, что и требовалось сделать.



Пусть стороны равностороннего треугольника легли снаружи ВА и АГ, и это будут ВΔ и ΔГ. Соединим ΔА и продолжим её до Е. Поскольку ВΔ равна ΔГ, и ΔА – общая, и ВА равна АГ, то и угол ВΔА равен углу ГΔА по восьмой теореме. И опять, поскольку ВΔ равна ΔГ и вместе с общей стороной ΔЕ они охватывают равные углы, что было показано, то и основание ВЕ равно основанию ЕГ по четвёртой теореме. И поскольку АВ равна АГ, и АЕ – общая, то и угол ВАЕ равен углу ГАЕ, что и требовалось показать.



Пусть стороны равностороннего треугольника легли внутри ВА и АГ, и это будут ВΔ и ΔГ. Вновь соединим АΔ. Поскольку ВА равна АГ, [277] и АΔ – общая, и основание ВΔ равно основанию ГΔ, тем самым угол ВАΔ равен углу ГАΔ по восьмой теореме. Так что угол А разделён пополам, как бы не

располагался равносторонний треугольник [51]. И всё это собрано вместе.

Переходя к следующим теоремам, добавив только, что в предложении угол может быть задан четырьмя способами: по положению, как когда мы говорим, что угол лежит на данной прямой и в данной точке; по виду, когда мы говорим, что это прямой угол, или острый, или тупой, или в целом прямолинейный или смешанный; по отношению, когда мы говорим, что он двукратный, или трёхкратный, или просто больше или меньше; по величине, как когда мы говорим, что он составляет треть от прямого угла. И сейчас угол был задан только по виду.

X. Данную ограниченную прямую разделить пополам.

Это задача, и прямая предполагается в ней ограниченной, поскольку неограниченная с обоих концов прямая не может быть определена, а ограниченная с одного конца при любом положении точки делится на неравные части: ведь неограниченная часть по необходимости будет больше ограниченного остатка. Остаётся тот случай, когда взятая для деления пополам прямая ограничена с обоих концов.

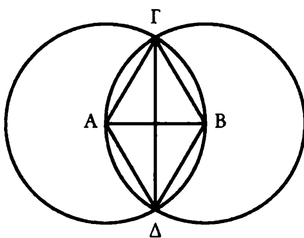
Эта задача привела некоторых [278] к размышлению о том, что в геометрии принято дополнительное предположение, согласно которому линия не состоит из не имеющих частей (ἐξ ἀμερῶν). Ведь если состоит, то в ограниченной линии их будет нечётное или чётное число. Но если нечётное, то видно, что при рассечении прямой рассечётся не имеющее частей, поскольку иначе одна часть будет состоять из большего числа неделимых, нежели другая. Так что данную линию будет не-

[51] Почему бы не применить для всех случаев одно общее построение, которым пришлось воспользоваться, когда равносторонний треугольник наложился на стороны исходного угла?

возможно рассечь пополам, если только величина состоит из не имеющих частей. Но если она не состоит из не имеющих частей, то делится беспредельно. А потому, говорят они, похоже, что в геометрии имеется общепринятое начало, согласно которому величина делится до бесконечности. На это мы ответим вслед за Гемином, что геометры, следуя общему понятию, принимают делимость непрерывного. Мы называем непрерывным то, что состоит из соприкасающихся частей, и оно всегда может быть разделено. Однако они не предполагают, что непрерывное делимо до бесконечности, но доказывают это из подходящих начал. Ведь когда они доказывают, что среди величин имеются несоизмеримые и что не все величины соизмеримы между собой, что они доказывают, как не то, что всякая величина всегда делима и мы не можем достичь не имеющего частей, которое было бы наименьшей общей мерой величин? Так что это доказуемо, а аксиома состоит в том, что всякое непрерывное делимо; тем самым и ограниченная линия, будучи непрерывной, делима. [279] Автор *Начал* делит ограниченную прямую пополам на основе этого понятия, не предполагая, что она делима до бесконечности. Ведь не одно и то же – быть делимым и быть делимым до бесконечности. С помощью этой же задачи можно отвергнуть учение Ксенократа [52], вводящего неделимые линии (ἄτομοι γραμμαί). В целом, если существует линия, то это или прямая, и она может быть разделена пополам, или это дуга окружности, и она больше некоторой прямой (ведь всякая дуга окружности всегда имеет некоторую меньшую прямую), или смешанная и тем более делимая, поскольку она разделяется на простые. Но это надо оставить для отдельного рассмотрения.

[52] Ксенократ Халкедонский, ученик Платона и глава Академии после смерти Спевсиппа.

Наш геометр делит пополам ограниченную прямую, пользуясь для построения первой и девятой теоремами, и для доказательства – только четвёртой, поскольку он показывает равенство оснований через углы [53]. А Аполлоний из Перги делит данную ограниченную прямую пополам следующим способом. Пусть требуется разделить пополам ограниченную прямую АВ. Проведём круг с центром А и раствором АВ, и вновь проведём другой круг с центром В и раствором ВА. Соединим пересечения кругов прямой ΓΔ. И она делит пополам прямую АВ. [280] В самом деле, проведем ΓΑ и ΓΒ – каждая из них равна АВ, и ΔΑ и ΔΒ равны по тому же самому, и ΓΔ – общая. Так что угол ΑΓΔ равен углу ΒΓΔ, и АВ разделена пополам по четвёртой теореме.



Такое доказательство предложенной задачи даёт Аполлоний. Он начинает его также с построения равностороннего треугольника, но затем вместо разделения пополам угла Г он показывает, что прямая делится пополам из-за равенства оснований. Доказательство автора *Начал* много лучше, и оно проще по началам (ἀπὸ τῶν ἀρχῶν).

[53] Евклид строит на данной прямой равносторонний треугольник, делит угол при его вершине пополам и доказывает, что построенная биссектриса делит пополам основание треугольника.

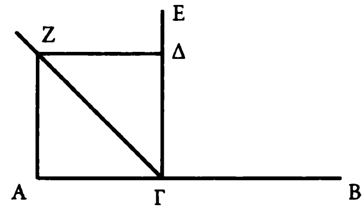
XI. К данной прямой из данной точки на ней под прямыми углами провести прямую.

Возьмём ли мы прямую с точкой на ней ограниченной с обоих концов, или неограниченной с обоих, или неограниченной с одного и ограниченной с другого, построение нашего геометра подходит для предложенной задачи. И даже если точка дана на конце прямой, мы выполним его, продолжив прямую. Ясно, что точка здесь дана по положению и только по положению, как лежащая на прямой; а прямая линия [281] дана по виду: ведь её величина, отношение или положение не определены. Автор *Начал* доказывает предложенное, пользуясь первой и третьей теоремами и одним первым постулатом, а также восьмой теоремой и определением прямой, проведённой под прямыми углами [54].

Если кто-нибудь потребует, чтобы точка лежала на конце непродолженной прямой, и мы провели через неё прямую под прямым углом, мы покажем, что это тоже возможно. Пусть имеется прямая АВ и дана точка А. Возьмём на АВ произвольную точку Γ и проведём из неё прямую ΓΕ под прямым углом к АВ, научившись этому из *Начал*. Отложим на ΓΕ отрезок ΓΔ, равный ΑΓ, и разделим угол Γ пополам прямой ΓΖ. Проведём из Δ прямую под прямыми углами к ΕΓ, и она встретится с ΓΖ в Ζ. Соединим Ζ с А прямой ΖΑ. Я утверждаю, что угол А является прямым. Ведь ΔΓ равна ΓΑ, ΓΖ – общая сторона, и они охватывают равные углы (ведь угол Γ поделён пополам), и ΔΖ равна ΖΑ, и все подобные равны всем, по четвёртой теореме,

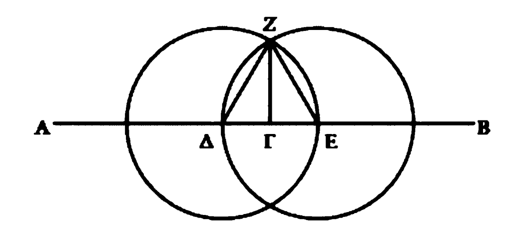
[54] Построение Евклида таково. Пусть даны прямая АВ и точка Γ на ней, через которую требуется провести перпендикуляр к АВ. Возьмём на ΑΓ произвольную точку Δ, и отложим по другую сторону от Γ отрезок ΓΕ, равный ΓΔ. Построим на ΔΕ равносторонний треугольник ΔΕΖ и соединим ΓΖ; и ΓΖ будет перпендикулярна ΔΕ.

так что и угол А равен [282] углу Δ. Тем самым угол А является прямым. И заданное доказано.



Однако автор Начал в этой затее не нуждается. Ведь он говорит в условии «под прямыми углами», а не «под прямым углом». А потому мы не должны брать точку на конце прямой; ведь проведённая прямая должна образовывать с имеющейся прямой углы, а не один угол.

Аполлоний проводит прямую под прямым углом следующим образом. Возьму на АГ произвольную точку Δ, и на ГВ отложу ГЕ, равную ГΔ. Затем начерчу круг с центром Δ и раствором ΔЕ, и вновь начерчу круг с центром Е и раствором ЕΔ, и проведу из Z в Г. Я утверждаю, что она проведена под прямыми углами. Ведь если провести ZΔ и ZE, они будут равны, ΔГ и ГЕ также будут равны, и ZГ – общая, так что углы при Г равны, по восьмой теореме. Тем самым эти углы – прямые.



И ты опять можешь видеть, что это доказательство сложнее предложенного автором *Начал*, и оно требует вычерчивания кругов, хотя достаточно начертить равносторонний треугольник и доказать предложенное. Всё остальное в этих доказательствах – общее. [283] А доказательство с помощью

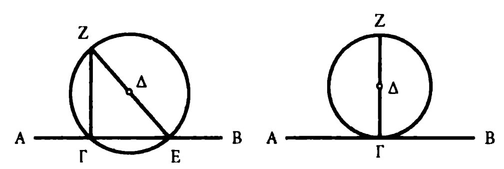
полукругов здесь даже не упоминается. Ведь оно предполагает многое из последующего, и полностью выпадает из порядка *Начал* [55].

XII. К данной неограниченной прямой из данной точки вне неё провести отвесную прямую линию.

Эта задача впервые была исследована Энопидом, который нашёл её полезной для астрономии. Он по-старинному называл перпендикуляр гномоном, поскольку гномон устанавливается под прямыми углами к горизонту. Перпендикуляр отличается от «прямой под прямыми углами» только способом задания (σχέσει), но не отличается по сути, о чём и говорит его название [56].

Перпендикуляр бывает двояким – плоским и телесным. Если и точка, из которой опущен перпендикуляр, и прямая лежат в одной и той же плоскости, перпендикуляр называет-

[55] Возможно, это доказательство выглядело так. Возьмём вне АВ произвольную точку Δ и проведём круг с центром Δ и раствором ΔΓ. Этот круг либо пересечёт АВ в ещё одной точке Е, либо коснётся АВ в Г. В первом случае проведём диаметр ΕΔΖ и соединим ΓΖ. Во втором случае проведём диаметр ΓΔΖ. Утверждается, что ΓΖ проведена под прямыми углами к АВ. Это следует в первом случае из того, что угол, вписанный в полукруг, является прямым, а во втором – из того, что диаметр, проведённый через точку касания, перпендикулярен касательной.



[56] Прямая «под прямыми углами» устанавливается на данной прямой из точки на ней, а перпендикуляр (κάθετος – букв. «отвес») опускается на данную прямую из точки вне неё.

ся плоским; а если точка находится над лежащей под ней плоскостью, он называется телесным. Плоский перпендикуляр проводится к прямой, телесный – к плоскости. И последний с необходимостью образует прямые углы не с одной прямой, но со всеми прямыми этой плоскости [57]; ведь перпендикуляр проведён к плоскости. В этой задаче автор *Начал* предлагает провести плоский перпендикуляр. [284] Ведь он предлагает провести его к прямой, и этот довод следует из того, что всё лежит в одной плоскости.

Когда проводится прямая под прямыми углами, точка берётся на данной прямой, и потому данную прямую не надо полагать неограниченной; а когда проводится перпендикуляр, данная прямая предполагается неограниченной, поскольку точка, из которой проводится перпендикуляр, лежит где-то вне прямой. Если прямая не будет неограниченной, может оказаться, что взятая точка будет лежать вне данной прямой, однако ляжет на эту прямую при её продолжении, и задача не разрешится. Поэтому он полагает прямую неограниченной, так что точка может быть взята только по любую сторону от неё, и ей не остаётся места лежать на прямой, продолжающей данную прямую, так что она будет лежать вне этой прямой, а не на ней. Поэтому прямая, к которой проводится перпендикуляр, задаётся неограниченной.

Но надо исследовать теоретически, как полагается беспредельное в целом. Ясно, что если имеется неограниченная прямая, то имеется и неограниченная плоскость, причём на деле (κατ' ἐνέργειαν), поскольку задача предложена. То, что в ощущаемом не существует величины, беспредельной в каком-либо из направлений, показано вдохновенным Аристотелем [58]

[57] См. кн. XI, опр. 3.

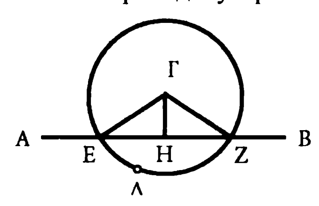
[58] Аристотель, *Физика* 204a8–206a8; *О небе* 271b1–276a17.

и теми, кто воспринял философию от него. Ведь тело, движущееся по кругу, не может быть беспредельным; и не одно из других [285] простых тел тоже, поскольку место каждого из них определено. Но отдельные и простые логосы также не могут быть беспредельными. Если у них нет ни протяжения, ни величины, то тем более у них нет и беспредельной величины. Остаётся считать, что беспредельное существует лишь в воображении, поскольку беспредельное не мыслится воображением. Ведь мыслить – значит придавать мыслимому форму и предел; и мышление устанавливает проход в воображаемом, проходит его и его объемлет. Так что беспредельное относится не к мышлению, но к неопределённому для мысли; и, будучи немыслимым, несоразмерным природе и непостижимым для мысли, оно и называется беспредельным. Как зрение узнаёт темноту по отсутствию видимого, так и воображение узнаёт беспредельное по его немыслимости. И оно порождает его в силу своей нераздельной способности непостижимого порождения, и мыслит беспредельное по его немыслимости. Ведь что не может быть пройдено до конца, то и называется беспредельным. Так что когда мы полагаем в воображении данную неограниченную прямую, подобно всем прочим геометрическим видам – треугольникам, кругам, углам, линиям, не удивительно ли, как эта линия может быть беспредельной на деле, и как она, будучи неопределённой, связана с определёнными понятиями? Ведь разум, из которого исходят рассуждения и доказательства, не пользуется беспредельным в науках, поскольку беспредельное [286] и наука всецело несовместимы; оно берёт его предположительно, а в доказательствах пользуется только определённым, и беспредельное берётся не ради беспредельного, но ради определённого. Ведь если данная точка не лежит на продолжении ограниченной прямой, и не отстоит от этой прямой так, что никакая часть прямой не лежит под точкой, у нас не будет никакой потребности в беспредельном. В этом случае пользуются

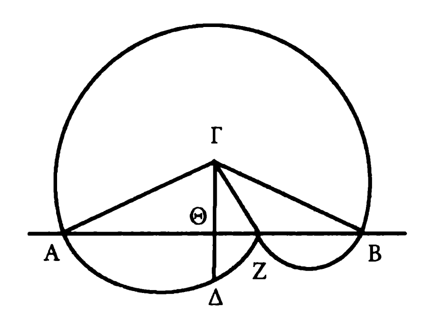
ограниченным, как не подлежащим проверке и бесспорным, а неограниченное предполагают в беспредельном воображении, которое служит источником порождения беспредельного. И о предположении беспредельного сказано достаточно.

Теперь нам следует отвести возражения, которые могут быть выставлены против построения в этой задаче [59]. Пусть, говорят они, даны неограниченная прямая AB и точка Г, из которой требуется провести перпендикуляр, и точка Δ с другой стороны, как говорит наш геометр; но пусть круг пересекает прямую AB в точках A, B и Z, как показано на чертеже. На этот довод мы ответим, что это невозможно. Рассечём AB пополам в Θ, [287] соединим ГΘ и продолжим до окружности, и соединим ГА и ГВ. Они равны как проведённые из центра, AΘ и ΘB тоже равны, ГΘ – общая, так что всё равно всему. Поэтому ГΘ проведена из Θ под прямыми углами. И опять, поскольку ГА и ГВ равны, они образуют равные углы в точках A и B. Но ГА и ГZ тоже равны, так угол ГAZ равен углу ГZA; и ГВ и ГZ тоже равны, так что угол ГZB равен углу ГBZ. Но поскольку углы в A и B равны, тем самым угол ГZA равен углу ГZB, и, будучи смежными, они тем самым будут прямыми. Оба угла при точке Θ – прямые, так что равны ГΘ и ГZ; но ГZ и ГΔ тоже равны, как проведённые из центра, так что ГΘ

[59] Евклид решает эту задачу так. Пусть дана прямая AB и точка Г вне неё. Отметим по другую сторону от AB произвольную точку Δ и проведём круг с центром Г раствором ГΔ. Он пересечёт AB в двух точках E и Z. Найдем у отрезка EZ середину H, соединим ГH и докажем, что ГH – искомый перпендикуляр.



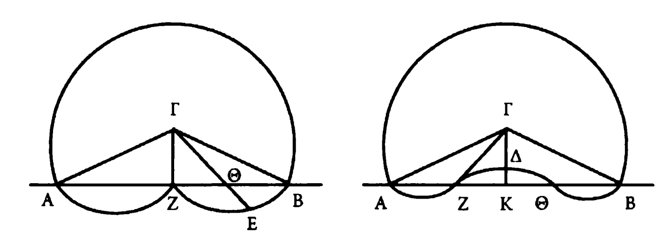
равна ГΔ, что невозможно. Следовательно, круг не пересекает прямую AB в другой точке.



И если кто-нибудь скажет, что начерченный круг делит AB в Z пополам, мы опять покажем, что это невозможно. Разделим ZB пополам в Θ. [288] Поскольку AZ равна ZB, сторона ГZ – общая, и основание ГА равно основанию ГВ, тем самым всё равно всему; так что углы при Z – прямые. И опять, ZΘ равна ΘB, сторона ГΘ – общая, и основание ГZ равно основанию ГВ, поскольку они проведены из центра; так что углы при Θ – прямые, поскольку они смежные. Так как оба угла ГZΘ и ГΘZ – прямые, тем самым ГZ равна ГΘ. Но ГZ равна ГЕ, как проведённые из центра. Тем самым ГΘ равна ГЕ, что невозможно.

Осталось отвести третье возражение. Пусть, говорят они, начерченный круг сечёт прямую в точках А и В, и в точках Z и Θ. Мы рассечём AB пополам в K и соединим ГА, ГZ, ГК, ГВ, чем покажем невозможное. Поскольку AK равна KB, сторона ГК – общая, и основание ГА равно основанию ГВ, тем самым углы при K – прямые, и углы при А и В равны. Но каждая из ГА, ГВ равна ГZ, и тем самым углы при Z – прямые, поскольку они равные и смежные. Далее, ГZ равна ГК, [289] поскольку они стягивают прямые углы. Но ГZ равна ГΔ, как проведённые из центра; тем самым ГΔ равна ГК, что невозможно. Так что

начерченный круг не может пересекать прямую AB, в точках, отличных от A и B, будь то в одной или в двух [60].

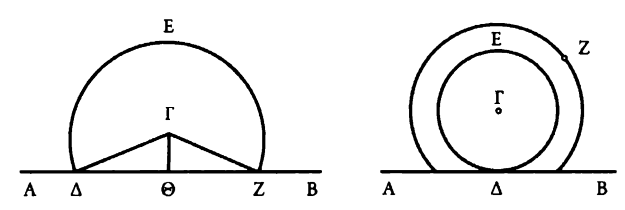


Таковы эти возражения. В построении этой задачи имеются случаи, которые надо отделить от возражений. Случай и возражение – не одно и то же: случай иначе доказывает то же самое, а возражение ведёт к невозможному. Однако комментаторы, не делая различий между ними, вводили их вместе, и было неясно, предлагали ли они нам делать чертежи для случаев или возражений. Мы же рассматриваем их отдельно, помещая случаи после возражений.

Пусть даны неограниченная прямая AB и точка Γ. Пусть кто-то скажет, что по другую сторону от прямой нет места, но оно имеется только со стороны Γ. Возьмём точку Δ на прямой, и проведём дугу окружности ΔEZ с центром Γ и раствором ΓΔ; [290] затем рассечём ΔZ в Θ, и соединим ΓΔ, ΓΘ, ΓZ. Поскольку ΔΘ равна ΘZ, ΓΘ – общая, и ΓΔ равна ΓZ, как проведённые из центра, а потому смежные углы при Θ равны и тем самым являются прямыми. Так что ΓΘ – перпендикуляр к ΔZ. А если кто-то скажет, что начерченный круг ΔE не пересекает прямую

[60] Приведённое здесь доказательство не является логически безупречным. В самом деле, пока что ничто не мешает кругу пересекать прямую в большем числе точек. Верно то, что каждое отдельное рассуждение будет вводить всё новые и новые пересечения; но откуда следует, что круг не может пересекать прямую в бесконечном числе точек?

АВ, но касается её, мы возьмём внешнюю точку Z и с центром Г и раствором ГZ получим искомое, как в только что рассмотренном случае. О случаях, на которых могут поупражняться читатели, сказано достаточно.



К этим двум задачам надо добавить воззрение, согласно которому прямая, восставленная под прямыми углами, подражает жизни, поднимаясь ввысь из пустоты, восходя к началам и оставаясь несклоняемой к худшему, тогда как перпендикуляр тоже подражает жизни, спускаясь вниз и оставаясь свободным от неопределённости рождений. Ведь прямой угол служит символом действия, соединившего в себе неуклонность, равенство, определённость и предел. [291] Поэтому и Тимей[61], говоря о божественных душах, называет круг иного, содержащий логосы ощущаемого, правильным (ὀρθός). В наших душах он расходится на всевозможные пути и разнообразно перекашивается из-за рождения, но в целом он является начальным и безразличным к тому, что ощущается. Неограниченная прямая служит символом целостного рождения в неограниченном и беспредельном движении, а также самой материи, не имеющей ни границы, ни формы; лежащая вне неё точка несёт образ неделимой сущности и присущей материи опустошённости; а опущенный перпендикуляр подражает жизни, изначально нисходящей в своём рождении от единого и неделимого. И поскольку перпендикуляр невозможно предъявить без кругов,

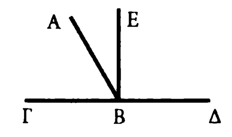
[61] Платон, *Тимей* 37b.

он служит также показателем наличного равновесия, приобретаемого живыми существами посредством ума. И хотя сама жизнь, будучи по сути своей движущейся, является беспредельной, она ограничивается и полнится начальной силой по причастности уму, и идёт вперёд с умом.

XIII. Если уставленная на прямой прямая образует углы, то она образует либо два прямых угла, либо углы, равные двум прямым.

После показанного в задачах он вновь переходит к теоремам. [292] Проведя перпендикуляр к прямой и прямую под прямыми углами, теперь он ищет, какие образованы углы и как они относятся к установленной прямой, если это не перпендикуляр. Он доказывает в общем, что всякая прямая, установленная на другой прямой, образует углы, которые будут либо двумя прямыми углами, если она стоит несгибаемо и не отклоняется ни в одну, ни в другую сторону, либо равными двум прямым углам, если она наклонена к одному концу и отклоняется от другого конца лежащей под ней прямой. И сколько отнято от одного прямого угла там, куда она наклонена, столько добавлено к другому в отклонении от него [62].

[62] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть прямая АВ установлена на прямой ГΔ. Если она образует с ГΔ прямые углы, искомое получено. Если нет, проведём ВЕ под прямыми углами к ГΔ. Угол ГВЕ равен углам ГВА, АВЕ. Тогда два прямых угла ГВЕ, ЕВΔ равны углам ГВА, АВЕ, ЕВΔ. Но углы АВЕ, ЕВΔ равны углу АВΔ. Получается, что два прямых угла ГВЕ, ЕВΔ равны углам ГВА, АВΔ.



Надо отметить, с какой точностью наш геометр высказывает предложение. Он не просто говорит, что всякая прямая, уставленная на прямой, образует либо два прямых угла, либо углы, равные двум прямым, но добавляет: «если она образует углы». Ибо если она стоит на конце прямой и образует один угол, будет ли он равен двум прямым? Очевидно, нет; ведь всякий прямолинейный угол меньше двух прямых, так же как всякий телесный угол меньше четырёх прямых. Даже если ты возьмёшь угол, который кажется самым тупым, это растяжение не доставит ему меры двух прямых углов. Для этого нам следует выпрямить образующую угол прямую.

Такова, как я уже сказал, его научная точность. Но что он хочет сказать, добавляя к выражению «два прямых угла» выражение «либо углы, равные двум прямым»? [293] Ведь если прямая образует два прямых угла, она образует два угла, равные прямым, поскольку прямые углы равны между собой. Может быть, второе обще для равных и неравных углов, а первое свойственно только равным? Когда истинно и особенное, и общее, мы обычно обозначаем их именем особенного; но когда этого не случается, мы для ясности предмета удовлетворяемся общим. Смежные углы вообще равны двум прямым углам, и два прямых в том числе, но не одни только прямые; а когда они являются прямыми, это особо выделяет присущее им равенство. А потому, сказав лишь то, что углы равны двум прямым, мы обозначим их как неравные, поскольку это выражение приложимо только к неравным, а к равным – нет. И так автор *Начал* противопоставляет им два прямых. Ведь это выражение само по себе обозначает неравенство обоих.

Отсюда можно видеть, каким образом равенство служит мерой и границей неравенства. И хотя уменьшение и возрастание тупых и острых углов неограничены и беспредельны, всё же, как сказано, они будут определены и ограничены прямым углом. И хотя каждый из них по отдельности уклоняется от по-

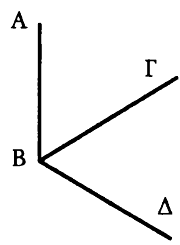
добия с прямым углом, ода они в одном единстве возвращаются к его границе. И хотя они не могут сравняться с простотой прямого угла, [294] они приобретают равенство с ним при его удвоении. Двойка, сама по себе неопределённая, служит образцом для их неопределённости. И так получается ясный подходящий образ первичных причин, всегда составляющий одну и ту же границу для беспредельного выхождения порождений. Ведь как иначе порождение, причастное большему и меньшему и привнесению неопределённости, согласуется с умственным и сравнивается с ним, если не по сопричастности его порождающим способностям, связанным с продвижением вперёд и с размножением? Ибо своей простотой и неделимостью они всецело превосходят то, что рождено. Вот что мы извлекли из этой теоремы для познания целого.

XIV. Если к одной и той же прямой из одной и той же точки на ней и по разные стороны от неё проведены две соседние прямые, образующие с ней два соседних прямых угла, то эти прямые лежат на прямой друг к другу.

Эта теорема обратна только что доказанной. Обращение всегда следует за ведущей теоремой. Там прямая ставилась на прямую и доказывалось, что полученные смежные углы будут двумя прямыми или равными двум прямым; здесь же о двух углах, образованных с прямой, известно, что они являются прямыми, а доказывается, [295] что получена одна прямая, проведённая к названной прямой. Данное там является искомым здесь; а доказывается она сведением к невозможному. Обратные теоремы обычно так и доказываются; а в задачах и ведущих теоремах выполняются построения.

Здесь мы тоже можем видеть крайний уровень строгости и непревзойденное истолкование научных определений. Прежде всего, к словам «если к одной и той же прямой» он добавляет

«из одной и той же точки на ней». Пусть у прямой имеются два конца, и одна прямая проведена из одного конца, а другая из другого, и они образуют с прямой углы, равные двум прямым, – могут ли они лежать на одной прямой? Как они смогут это сделать, будучи проведёнными из разных точек прямой? И он добавляет «из одной и той же точки на ней», чтобы обе прямые выходили из одной точки. Во-вторых, поскольку прямые линии, проведённые из одной точки на прямой, могут быть несоседними (ведь из одной точки можно провести множество прямых), он добавляет: «две соседние прямые». В третьих, поскольку соседние прямые могут лежать и по одну сторону, и по разные, но соседние по одну сторону не могут лежать на прямой друг к другу, он устраняет это, дозволяя нам мыслить соседние прямые лежащими по разные стороны, ведь именно для них может быть доказано, что они лежат на одной прямой. Пусть по одну сторону [296] от прямой АВ установлены прямые ВΓ, ВΔ. Они являются соседними друг к другу: ведь между ними нет никакой другой прямой. Соседними называются те вещи, между которыми нет ничего подобного им. Так колонны называются соседними, если между ними нет другой колонны. Конечно, повсюду между ними есть воздух, но ничего однородного нет. Находясь с одной стороны, они не могут лежать на одной прямой, даже если углы, которые они образуют с АВ, равны двум прямым углам. Ведь ничто не запрещает углу АВΔ быть равным одному прямому с третью, а углу АВΓ – оставшимся двум третям прямого. И о предложении сказано достаточно.

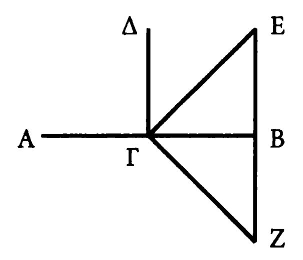


В построении он использует один постулат, а именно – второй (требуется, чтобы всякая конечная прямая могла быть продолжена по прямой), тогда как в доказательстве он опирается на предыдущую теорему и две аксиомы (равные одному и тому же равны между собой; если от равных отнять равные, то и остатки будут равны); а для сведения к невозможному – ещё и тем, что целое больше части: ведь когда отнимается один общий угол, они получаются равными, что невозможно [63].

[297] Что возможно к одной прямой из одной точки на ней провести две соседние прямые по одну сторону от неё, образующие углы, равные двум прямым углам, и углы не будут лежать на одной прямой, мы покажем, следуя Порфирию. Пусть имеется прямая AB с произвольной точкой Г на ней. Проведём ГΔ под прямым углом к AB, и разделим угол ΔГB пополам прямой ГЕ. Опустим из Е перпендикуляр ЕВ, продолжим его так, чтобы BZ была равна ЕВ, и соединим ГZ. Поскольку ЕВ равна BZ, сторона BГ – общая, и ими охвачены равные углы (ведь эти углы – прямые), тем самым и основание ГЕ равно основанию ГZ, и всё равно всему. Тем самым угол ЕГВ равен углу ZГВ. Но угол ЕГВ равен половине прямого угла (ведь ЕГ разделила прямой угол пополам), так что и угол ZГВ равен половине прямого угла. Тем самым угол ΔГZ равен одному прямому углу с половиной, поскольку угол ΔГЕ также равен половине прямого

[63] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть к прямой AB по разные стороны от неё под прямыми углами к ней проведены прямые BГ и BΔ. Утверждается, что эти две прямые лежат на одной прямой. В самом деле, допустим, что это не так. Продолжим прямую ГВ по прямой BE. Тогда по предыдущей теореме углы ГВА и ABE будут прямыми или равными двум прямым; и поскольку угол ГВА – прямой, то тем самым и угол ABE – тоже прямой. Получается, что углы ABE и ABΔ равны друг другу как прямые, но при этом один из них является целым, а другой – частью, что невозможно.

угла. Тем самым к прямой ГΔ из одной точки Г на ней [298] по одну сторону от неё проведены две соседние прямые ГЕ и ГZ, образующие с ней два прямых угла: ГЕ – половину, ГZ – один с половиной. И чтобы не было невозможным искомое, поскольку ГЕ и ГZ образуют с ΔГ углы, равные двум прямым, и должны тем самым лежать на одной прямой, наш геометр добавляет «по одну и ту же сторону». Так что прямые, образующие с прямой углы, равные двум прямым углам, должны лежать по разные стороны от этой прямой, и когда они ограничены одной точкой, одна прямая должна проходить по одну, а другая – по другую сторону от этой прямой.



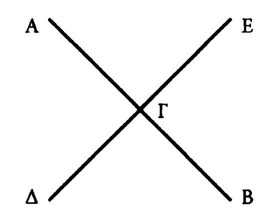
XV. Если две прямые пересекаются, они образуют вертикальные углы, равные между собой.

Вертикальные углы отличаются от смежных, а именно: эти возникают при пересечении двух прямых, тогда как те – когда только одна прямая разделяет другую. Ведь когда прямая, сама по себе нерассечённая, рассекая своим концом другую прямую, образует два угла, мы называем их смежными; но когда пересекаются две прямые, они производят вертикальные углы. Мы называем их так, потому что их вершины сходятся в точке. И их вершины – это точки, сходящиеся в которых плоскости образуют углы.

[299] В этой теореме доказывается, что вертикальные углы при двух пересекающихся прямых равны. Евдем говорит, что

она впервые была открыта Фалесом, но её научное доказательство впервые было получено автором *Начал*. В ней показаны не все разделы, поскольку построение здесь отсутствует. Но доказательство, наличие которого необходимо всегда, зависит от тринадцатой теоремы и пользуется двумя аксиомами: тем, что равные одному и тому же равны между собой, и тем, что при отнятии равных от равных остатки тоже равны.

Теорема Евклида ясна [64]; ясно и её обращение: если к некоторой прямой не по одну сторону от неё проведены две прямые, образующие равные вертикальные углы, то они лежат на одной прямой. Пусть имеется прямая АВ и точка Г на ней; и пусть из Г не по одну сторону от неё проведены две прямые ГΔ и ГЕ, образующие равные углы АГΔ и ВГЕ. Я утверждаю, что ГΔ и ГЕ лежат на одной прямой. Ведь поскольку ГΔ установлена на АВ, она образует углы ΔГА и ΔГВ, равные двум прямым. Но угол ΔГА равен [300] углу ВГЕ. Так что углы ΔГВ и ВГЕ также равны двум прямым. И поскольку к прямой ВГ по разные стороны от неё проведены две соседние прямые ГΔ и ГЕ, образующие с ней два соседних прямых угла, ГΔ и ГЕ лежат на прямой друг к другу. Теорема, обратная к предложенной, также доказана.



[64] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть прямая АВ пересекается с прямой ΔЕ в точке Г. Углы ЕГА и АГΔ равны двум прямым; углы АГΔ и ΔГВ также равны двум прямым; тем самым углы ЕГА и АГΔ равны углам АГΔ и ΔГВ. Отнимем общую часть АГΔ; тем самым угол ЕГА равен углу ΔГВ.

Похоже, что наш геометр исключает её, поскольку она легко доказывается всё тем же способом сведения к невозможному, каким мы доказали предыдущую теорему. Предположим то же самое: я утверждаю, что ΓΔ и ΓΕ лежат на прямой. Если это не так, продолжим ΓΔ по прямой ΓΖ. Поскольку две прямые ΑΒ и ΔΖ пересекают друг друга, они производят равные вертикальные углы; тем самым равны углы ΑΓΔ и ΒΓΖ. Но углы ΑΓΔ и ΒΓΕ также равны. Тем самым угол ΒΓΖ равен углу ΒΓΕ, меньший равен большему, что невозможно. Следовательно, по прямой с ΓΔ нет другой прямой, и тем самым ΓΔ и ΓΕ лежат на прямой, в предположении равенства вертикальных углов. Поскольку это то же доказательство, что и в четырнадцатой теореме, не будет ли это обращение излишним? Мы же рассмотрели ради упражнения оба доказательства: [301] и сведением к невозможному, и прямым путём.

Похоже, что несомненность пятнадцатой теоремы основана на подобочастии прямых и положении их концов, поскольку линии, имеющие это свойство и пересекающие друг друга, по необходимости имеют подобные (ὁμοίας) наклоны друг к другу по каждую из двух сторон [65]. Дуги окружностей, и в целом те линии, которые не являются прямыми, при пересечении не обязательно производят равные вертикальные углы, но иногда равные, а иногда неравные. Ведь когда два равных круга пересекаются, проходя через центры друг друга, или даже не через центры, они производят равные вертикальные луннообразные углы, однако из двух других углов двояковыпуклый больше двояковогнутого [66]. А прямые расположены концами так, что отрезки одной прямой образуют с отрезками другой прямой равные расхождения.

[65] Возможно, здесь излагается доказательство, восходящее к Фалесу.

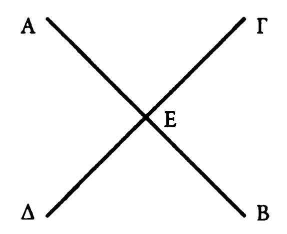
[66] И тем не менее разность этих углов меньше любого прямолинейного угла.

Поризм. Отсюда ясно, что если две прямые пересекаются, то четыре угла равны четырём прямым.

Поризм – это геометрический термин; и он имеет два значения. Мы называем поризмом утверждение, прямо вытекающее из доказательства другой теоремы, схожее с неожиданным даром[67] и находкой при поиске. А ещё мы называем так вопросы, решение которых требует поиска, а не только построения или простого созерцания. [302] То, что углы при основании равнобедренного треугольника равны, следует усмотреть, – и такое знание относится к наличному сущему. Разделить угол пополам, построить треугольник, отнять или поместить нечто – во всём этом нужно выполнить некоторое действие. А когда нужно найти центр данного круга, или найти наибольшую общую меру двух данных соизмеримых величин, или что-то в таком же духе, – это нечто среднее между задачами и теоремами. Ведь здесь производится не порождение искомого, но его поиск; но это – и не чистая теория, поскольку здесь нужно произвести нечто зримое и выставить искомое перед глазами. Такого рода вопросы Евклид составил и описал в трёх книгах[68]. Но о таких поризмах мы здесь речи не ведём. Поризмы в *Началах* – это утверждения, прямо вытекающие из доказательства другой теоремы, хотя сами они и не были в ней искомыми; и таково предложенное здесь. Ведь искомым было равенство вертикальных углов при пересечении двух прямых. И доказательство этого факта тут же доставляет и доказательство того, что четыре угла равны здесь четырём прямым. Ведь мы говорим: «пусть АВ и ГΔ – это две прямые, пересекающиеся в точке Е; и поскольку АЕ установлена на ГΔ, она производит смежные углы, равные

[67] ἕρμαιον – «дар Гермеса».
[68] Это сочинение Евклида не сохранилось.

двум прямым; и опять, [303] поскольку ВЕ установлена на ГΔ, она производит смежные углы, равные двум прямым»; так что вместе с тем мы заключаем, что углы при точке Е равны четырём прямым.



Поризм – это теорема, которая проясняется без усилий из доказательства другой задачи или теоремы. Мы обнаруживаем поризмы как бы случайно, а не в результате предварительного полагания или поиска, поэтому мы сравниваем их со счастливыми находками. И может статься, что превосходные математики дали им такое имя, чтобы показать многим людям, возбуждаемым выгодой, что истинными дарами богов и счастливыми находками являются именно эти теоремы, а не то, что ищут эти люди. Ведь они порождаются нашими наличными средствами, и способность к порождению знания добавляет их к результатам предыдущего поиска, проясняя тем самым изобилие теорем. Так описываются особенности поризмов.

А разделяются они, во-первых, по наукам: одни поризмы относятся к геометрии, а другие – к арифметике. Наш поризм является геометрическим, а тот, что находится в конце второго предложения седьмой книги – арифметическим. Во-вторых – по тому, что предшествует искомому: [304] одни следуют за задачами, другие – за теоремами. Наш поризм следует за теоремой, а тот, что в конце второго предложения седьмой книги – за задачей. В третьих – по методам показа: одни доказываются прямо, другие – сведением к невозможному. Наш поризм доказывается прямо, а тот, что идёт за первым пред-

ложением третьей книги – сведением к невозможному. Можно разделять поризмы и многими другими способами, но нам достаточно и этих.

Поризм, о котором пойдёт речь, учит нас, что место вокруг одной точки распределяется на углы, равные четырём прямым. Он послужил отправным пунктом той парадоксальной теоремы, которая показывает, что только три многоугольника могут целиком заполнять место вокруг одной точки: равносторонний треугольник, квадрат и равносторонний и равноугольный шестиугольник. А именно, равносторонний треугольник, взятый шесть раз, так как две трети на шесть дают четыре прямых угла; шестиугольник – три раза, так как каждый угол шестиугольника равен одному прямому с третью, а квадрат – четыре раза, так как каждый угол квадрата прямой. Таким образом, его заполняют шесть равносторонних треугольников, сходящихся углами, в совокупности дающими четыре прямых угла, или три шестиугольника, или четыре квадрата. Любые другие многоугольники, как их не прикладывай углами, дают либо меньше четырёх прямых углов, [305] либо больше; и только эти, согласно названным числам, составляют ровно четыре прямых угла. Эта теорема принадлежит пифагорейцам.

По этому поризму доказывается, что и более двух прямых, пересекающихся в одной точке, – пусть их будет три, или четыре, или сколько угодно, – производят углы, в целом равные четырём прямым: ведь они разделяют место четырёх прямых углов. Ясно также, что всегда число углов будет удвоенным по сравнению с числом прямых. Если пересекаются две прямые, при них будет четыре угла, равные четырём прямым углам; если три – будет шесть углов; если четыре – восемь; и так до бесконечности. И количество прямых всегда удваивается. Углы же, возрастая по количеству, уменьшаются по величине, поскольку всегда делится оно и то же, четыре прямых угла.

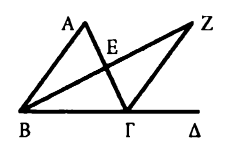
XVI. Во всяком треугольнике при продолжении одной из сторон внешний угол треугольника будет больше, чем каждый из двух внутренних противолежащих ему углов.

Некоторые приводят это предложение сокращённо, опуская фразу «при продолжении одной из сторон», чем подают некоторым другим, в частности Филиппу[69], повод для критики, как говорит механик Герон. Ведь треугольник как таковой ещё не имеет внешнего угла. И все, кто желает отвести [306] это обвинение, восстанавливают в этом предложении опущенное, в согласии с нашим геометром. Ведь и в пятой теореме, желая доказать, что углы под основанием равнобедренного треугольника равны, он добавляет: «когда продолжены равные прямые, углы под основанием будут равны». И хотя другие приводят условие этой теоремы сокращённо, автор *Начал* записывает его полностью.

Что же говорит это предложение? Что во всяком треугольнике, если ты продолжишь одну из сторон, ты найдёшь, что внешний угол треугольника будет больше, чем каждый из двух внутренних противолежащих ему углов[70]. Несколько ниже бу-

[69] Возможно, это Филипп Мендейский, упомянутый в 67.23.

[70] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть в треугольнике ΑΒΓ сторона ΒΓ продолжена в Δ. Разделим ΑΓ пополам в Ε, соединим ΒΕ и продолжим её на ΕΖ, равную ΒΕ; соединим ΓΖ. Треугольники ΑΒΕ и ΓΖΕ равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому угол ΕΑΒ равен углу ΕΓΖ. Но угол ΕΓΖ меньше угла ΕΓΔ. Поэтому внутренний угол ΓΑΒ меньше внешнего угла ΕΓΔ. Аналогичное доказательство может быть построено и для других углов.



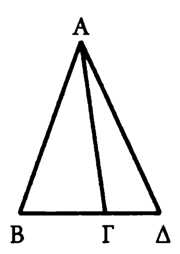
дет показано, что он равен им обоим вместе [71]; здесь же показывается, что он больше каждого из них. По необходимости он сравнивает его с противолежащими углами, а не со смежным. Ведь внешний угол может быть и равен смежному, и меньше его, а тех двух он всегда больше. Пусть треугольник будет прямоугольным, и ты представишь, что продолжена одна из сторон при прямом угле, – тогда внешний угол будет равен смежному с ним. А в тупоугольном треугольнике внутренний угол может быть больше внешнего. Но в отношении к противолежащим углам – ведь в треугольнике один угол будет смежным с внешним, а два будут противолежащими с ним – внешний угол больше каждого из них, хотя он не обязательно больше смежного с ним.

[307] Некоторые объединяют эту теорему с той, что доказывается вслед за ней, и составляют предложение так: «Во всяком треугольнике при продолжении одной из сторон внешний угол треугольника будет больше, чем каждый из двух внутренних противолежащих ему углов, и любые два внутренних угла будут меньше двух прямых». Это соединение двух теорем не лишено основания, и наш геометр производит его ниже для равенства углов: «Во всяком треугольнике внешний угол равен двум внутренним противолежащим ему углам, и три угла треугольника равны двум прямым» [72]. И они считают приемлемым в схожей ситуации соединить искомое и сделать предложение составным. Ясно, что предложенное для доказательства является составным, и данные, если они содержат упомянутое выше добавление, тоже будут составными: ведь мы должны помыслить две вещи, исходный треугольник и одну продолженную сторону. А без него оно будет составным в возможности

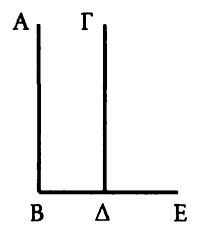
[71] Предложение I.32.
[72] Предложение I.32.

и простым на деле. Ведь даже если оно не добавлено, его всё равно надо прибавить к данному. Ибо само предположение о наличии внешнего угла требует продолжения одной стороны. Но об этом достаточно.

Эта теорема даёт нам понять, что невозможно провести три равные прямые из одной точки [308] к одной прямой. Допустим, что из одной точки к одной прямой ВΔ проведены три равные прямые АВ, АГ, АΔ. Поскольку АВ равна АГ, углы при основании будут равны, и угол АВГ будет равен углу АГВ. И опять, поскольку АВ равна АΔ, угол АВΔ будет равен углу АΔВ. Но угол АВГ равен углу АГВ. Тем самым угол АГВ равен углу АΔВ, внешний – внутреннему противолежащему, что невозможно. Так что из одной точки к одной прямой невозможно провести три равные прямые.



С помощью этой теоремы мы также можем доказать, что если прямая, падая на две прямые, образует внешний угол, равный противолежащему внутреннему, то эти прямые не образуют треугольника и не встречаются, поскольку один угол будет и больше другого, и равен ему, что невозможно. Пусть имеются прямые АВ и ГΔ, и прямая ВЕ, падая на них, образует равные углы АВΔ и ГΔЕ. Тогда АВ и ГΔ не встречаются. [309] Ведь если они встречаются, упомянутые углы будут равными, а именно, угол ГΔЕ будет равен углу АВΔ, но это невозможно, поскольку внешний угол больше противолежащего внутреннего угла.

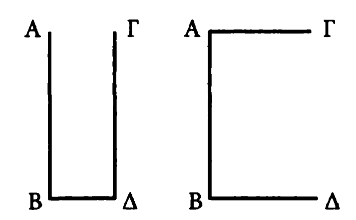


И по необходимости, если они встретятся, углы не останутся равными, но угол при Δ всегда будет больше. Ведь если АВ остаётся неподвижной, и ты представишь, что ГΔ движется к ней навстречу, ты будешь увеличивать расхождение угла ГΔЕ, поскольку чем ближе ГΔ подходит к АВ, тем сильнее она отходит от ΔЕ. И если ты оставишь неподвижной ГΔ и представишь, что к ней движется АВ, ты будешь уменьшать угол АВΔ, ведь АВ приближается и к ГΔ, и к ВΔ. И если ты будешь сдвигать их навстречу друг другу, ты найдёшь, что АВ, приближаясь к ВΔ, сводит и угол АВΔ, тогда как ГΔ, двигаясь к АВ, отходит от ΔЕ и увеличивает угол ГΔЕ. Поэтому по необходимости, когда имеется треугольник и АВ встречается с ГΔ, внешний угол будет больше [310] противолежащего ему внутреннего угла. Ведь если внутренний угол не меняется, внешний угол увеличивается, и если внешний угол не меняется, внутренний угол уменьшается, а если оба меняются,[73] внутренний угол сходится, а внешний расходится. Причина этого обнаруживается в движении прямых, ибо одна прямая движется к стороне, с которой она образует внутренний угол, а другая отходит от стороны, с которой она образует внешний угол. Отсюда ты можешь заключить, как порождение вещей доставляет нашим глазам истинные причины искомого.

73 Надо бы добавить: «навстречу друг другу».

XVII. Во всяком треугольнике два угла, взятые любым образом, будут меньше двух прямых углов.

Здесь показано, что два произвольных угла треугольника неопределённо меньше двух прямых углов; а ниже определяется, насколько меньше, и остатком будет третий угол треугольника. Ведь три угла равны двум прямым [74], так что два из них меньше двух прямых углов на третий угол. Доказательство автора *Начал* идёт очевидным путём, с применением предыдущей теоремы [75]. Но здесь, как и в предыдущей теореме, надо рассмотреть порождение треугольников, чтобы открыть причину [311] этого свойства. Пусть AB и ΓΔ вновь установлены под прямыми углами к BΔ. Если здесь возникнет треугольник, AB и ΓΔ будут должны сходиться друг к другу. Но их схождение уменьшит внутренние углы, и они станут меньше двух прямых. Ведь до схождения они были равны двум прямым. Схожим образом, если мы представим AΓ и BΔ установленными под прямыми углами к AB, из схождения прямых проистекут те же выводы, и углы при AB станут меньшими двух прямых. То же и для оставшейся стороны.

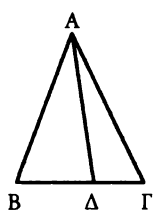


[74] Предложение I.32.

[75] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть сторона AB треугольника ABΓ продолжена до Δ. Тогда по I.16 внутренний угол BAΓ меньше внешнего угла AΓΔ. Прибавим к каждому из них внутренний угол AΓB. Тем самым два внутренних угла BAΓ и AΓB меньше двух смежных углов AΓB и AΓΔ, в сумме равных двум прямым.

И причина состоит в этом, а не в том, что внешний угол больше каждого из внутренних противолежащих углов. Ведь нет необходимости, чтобы была продолжена сторона, или чтобы был построен внешний угол; однако необходимо, чтобы любые два внутренних угла были меньше двух прямых. И как то, что не необходимо, может быть причиной необходимого [76]? Так что я утверждаю, что причиной служит схождение прямых к основанию, уменьшающее углы.

[312] Поскольку автор *Начал* показывает искомое с помощью внешних углов, мы сейчас получим этот результат без продолжения сторон. Пусть имеется треугольник ΑΒΓ; возьмём на ΒΓ произвольную точку Δ, и соединим ΑΔ. Поскольку в треугольнике ΑΒΔ продолжена одна сторона ΒΔ, внешний угол ΑΔΓ будет больше внутреннего угла ΑΒΔ. И опять, поскольку в треугольнике ΑΔΓ продолжена одна сторона ΔΓ, внешний угол ΑΔΒ будет больше внутреннего угла ΑΓΔ. Но углы при ΑΔ равны двум прямым по тринадцатой теореме. Тем самым углы ΑΒΓ и ΑΓΒ будут меньше двух прямых.



Сходным образом мы докажем, что углы ΒΑΓ и ΒΓΑ меньше двух прямых, взяв точку на ΑΓ и проведя из Β прямую к взятой точке. И вновь, мы докажем, что углы ΓΑΒ и ΓΒΑ меньше двух прямых, взяв точку на ΑΒ и проведя из Γ прямую к взятой точке. Так предложенное доказывается посредством той же теоремы без продления сторон треугольника.

[76] Аристотель, *Вторая Аналитика* 73a24.

[313] С помощью этой теоремы можно доказать, что из одной точки на одну прямую нельзя опустить два перпендикуляра. Допустим, что из точки А на прямую ВГ опущены два перпендикуляра АВ и АГ. Тем самым углы АВГ и АГВ – прямые. Но поскольку АВГ – треугольник, любые два его угла меньше двух прямых. Так что углы АВГ и АГВ меньше двух прямых. Но они равны двум прямым как перпендикуляры, что невозможно. Так что из одной точки на одну прямую нельзя опустить два перпендикуляра.

XVIII. Во всяком треугольнике бо́льшая сторона стягивает больший угол.

Из пятой и шестой теорем мы научились тому, что равенство сторон треугольника приводит к равенству стянутых ими углов, и что равенство углов приводит к равенству стягивающих сторон. Но тому, что неравенство сторон приводит к неравенству стянутых углов, и обратному к нему, мы научаемся из следующих теорем, а именно, из восемнадцатой и девятнадцатой. [314] Эта теорема показывает, что бо́льшая сторона стягивает больший угол; та – что больший угол стянут большей стороной. Они взаимно обратны, рассматривая одни и те же свойства противоположным образом, как и пятая с шестой теоремой. Ясно, что в неравносторонних треугольниках мы говорим о меньшей и большей сторонах по их отношению, и различаем меньшую, среднюю и бо́льшую стороны; и то же для углов. В равнобедренных треугольниках достаточно было просто различать бо́льшую и меньшую стороны, ведь там одна сторона была не равна двум другим, будучи больше их или меньше; а для равносторонних треугольников эта теорема вовсе не имеет места.

Ты видишь, что предложения, показывающие равенство сторон и углов, относятся к равносторонним и равнобедренным треугольникам, а показывающие неравенство – к равнобедренным и неравносторонним. Причина этого состоит в том,

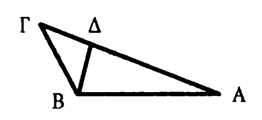
что одни треугольники порождены одним лишь равенством, другие – одним лишь неравенством, а третьи – обоими: и равенством, и неравенством. Так одни сущие порождены пределом, другие – беспредельным, третьи – смесью их обоих. Эта тройка возникает повсюду: в линиях, углах, фигурах, а среди фигур – в треугольных, четырёхугольных и следующих за ними. Но предел в геометрических видах проявляет себя или через подобие, или через равенство; беспредельное – или через неподобие, [315] или через неравенство; а смешанное иногда возникает из подобия и неподобия, а иногда – из равенства и неравенства. Причина этого состоит в том, что геометрические виды относятся и к количеству, и к качеству.

Здесь подразумевается различие между двумя признаками [77], и ясно, что автор *Начал*, говоря «во всяком треугольнике», не имеет в виду равносторонний треугольник, но всякий треугольник, имеющий бо́льшую и меньшую стороны. Мы должны полагать данное ведущим, а вторичное – искомым: «Во всяком треугольнике, имеющем бо́льшую и меньшую стороны, бо́льшая сторона стягивает больший угол».

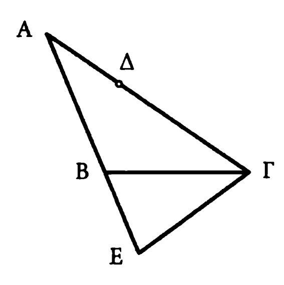
Наш геометр в своём построении берёт треугольник ΑΒΓ, в котором ΑΓ больше ΑΒ, и чтобы доказать, что угол Β больше угла Γ, он отрезает от ΑΓ длину ΑΔ, равную ΑΒ [78]. Но она мо-

[77] То есть между большим и меньшим.

[78] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть в треугольнике ΑΒΓ сторона ΑΓ больше стороны ΑΒ. Отложим на ΑΓ отрезок ΑΔ, равный ΑΒ. Треугольник ΑΒΔ – равнобедренный, поэтому угол ΑΒΔ равен углу ΑΔΒ. Угол ΑΒΓ больше угла ΑΒΔ, как целое и часть. Угол ΑΔΒ больше угла ΑΓΒ, как внешний и внутренний в треугольнике ΒΔΓ. Поэтому угол ΑΒΓ меньше угла ΑΓΒ.

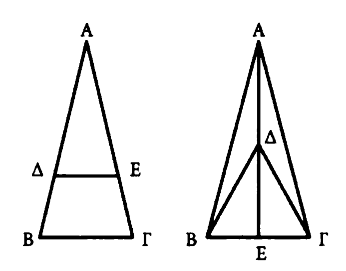


жет отрезаться и от Г; докажем предложение при этой посылке, [316] следуя Порфирию. Пусть ΔГ равна АВ. Продолжим АВ до Е, и положим ВЕ равным ΔА. При этом целое АЕ будет равно АГ. Соединим ЕГ. Поскольку АЕ равно АГ, угол АЕГ равен углу АГЕ по пятой теореме. Поэтому угол АЕГ больше угла АГВ. Но угол АВГ больше угла АЕГ, ведь в треугольнике ГВЕ продолжена сторона ЕВ, и внешний угол АВГ больше противолежащего внутреннего угла. Тем самым угол АВГ больше угла АГВ, что и требовалось показать.



Таковы геометрические доказательства. Но ясно, что причина этого свойства состоит в увеличении и уменьшении самой стороны, стягивающей угол. Ведь увеличиваясь, она увеличивает угол, а уменьшаясь – уменьшает его. Это происходит из-за того, что прямая натянута к концам. Будучи натянутой к концам, она изменяет величину угла в соответствии с собственным увеличением и уменьшением.

Мы говорим это об одном треугольнике, поскольку возможно, чтобы один и тот же угол стягивался большей и меньшей прямой, и чтобы одна и та же прямая стягивала и больший, и меньший угол. [317] Пусть АВГ – произвольный равнобедренный треугольник, и на АВ взята точка Δ, на АГ отложена АЕ, равная АΔ, и проведена ΔЕ. Угол А стягивает ΔЕ и ВГ, и одна из них больше, а другая меньше; и таким же рассуждением можно взять великое множество бóльших и меньших прямых, стягивающих угол А.



И опять, пусть АВГ – равнобедренный треугольник, у которого ВГ короче, чем ВА и АГ. Построим на ВГ равносторонний треугольник ВΔГ, проведём АΔ и продолжим до Е. Поскольку угол ВΔЕ – внешний в треугольнике АВΔ, он больше угла ВАΔ, и таким же образом угол ГΔЕ больше угла ГАΔ. Тем самым целый угол ВΔГ больше угла ВАГ, и одна прямая стянута сразу и бóльшим, и меньшим углами. И уже показано, что один угол может стягивать и бóльшую, и меньшую прямую. Но в одном и том же треугольнике [318] одна прямая стягивает один угол, и всегда бóльшая – больший и меньшая – меньший. И мы видели причину этого.

XIX. Во всяком треугольнике больший угол стянут большей стороной.

Эта теорема обратна к предыдущей. В обеих теоремах и данное и искомое является простым. Заключение этой является предположением той, и предположение – заключением. Та теорема идёт первой, потому что в ней за данное взято неравенство сторон, а эта следует за ней, потому что в ней предполагается неравенство углов. Ведь стороны прямолинейных углов считаются охватывающими, а углы – охватываемыми. И та теорема доказывается прямым способом, а эта – сведением к невозможному.

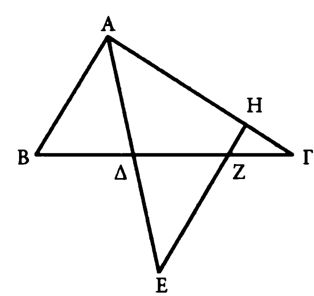
Наш геометр заключает о невозможности разделением. «Я утверждаю, что когда углы неравны, стягивающие стороны

тоже неравны, и бóльшая сторона стягивает больший данный угол. Ведь если сторона, стягивающая больший угол не будет большей, то она будет равной или меньшей. Но если она равна, то и стянутые углы будут равны по пятой теореме. А если она меньше, то по предыдущей теореме будет меньше и стянутый угол. Ведь показано, что бóльшая сторона стягивает больший угол, а меньшая – меньший. [319] И тогда углы получатся обращёнными. Следовательно, сторона больше стороны».

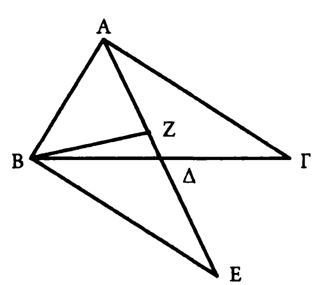
Но возможно доказать это предложение и без разделения, если мы предварительно докажем следующую лемму:

«Если угол треугольника разделён пополам, и разделяющая угол прямая опускается на основание и делит его на неравные части, то охватывающие угол стороны будут неравными, и бóльшая будет встречаться с большим отрезком стороны, а меньшая – с меньшим».

Пусть в треугольнике АВГ угол А разделён пополам, и АΔ делит ВГ на неравные отрезки, так что ГΔ больше ВΔ. Я утверждаю, что АГ больше АВ. Продолжим АΔ, и отложим на ней ΔЕ, равную АΔ. И поскольку ΔГ больше, я отложу на ней ΔZ, равную ВΔ, соединю ЕZ и продолжу её до Н. И вот АΔ равна ΔЕ, и ВΔ равна ΔZ, две равны двум, и они охватывают вертикальные углы. Так что и основание АВ равно основанию ЕZ, [320] и всё равно всему, а потому и угол ΔЕZ равен углу ΔАВ. Но этот угол равен углу ΔАН, так что сторона АН равна стороне ЕН, по шестой теореме. Поэтому АГ больше ЕZ. Но ЕZ равна АВ. Тем самым АГ больше АВ, что и требовалось показать.



Приняв эту лемму, докажем, что больший угол стянут большей стороной. Пусть ΑΒΓ – треугольник, в котором угол Β больше угла Γ. Я утверждаю, что ΑΓ больше ΑΒ. Разделим ΒΓ пополам в Δ, проведём ΑΔ, продолжим её так, чтобы ΔΕ было равно ΑΔ, и соединим ΒΕ. И вот ΒΔ равна ΔΓ и ΑΔ равна ΔΕ, две равны двум, и они охватывают равные вертикальные углы. Тем самым равны и основания ΒΕ и ΑΓ, и всё равно всему, так что и угол ΒΔΕ равен [321] углу Γ. Но угол Γ меньше угла ΑΒΔ. Тем самым угол ΒΔΕ меньше угла ΑΒΔ. Разделим угол ΑΒΕ прямой ΒΖ. При этом ΕΖ будет больше, чем ΖΑ. И поскольку в треугольнике ΑΒΕ угол Β разделён пополам прямой ΒΖ, и ΕΖ больше ΑΖ, тем самым по только что доказанной лемме ΒΕ будет больше, чем ΒΑ. Но показано, что ΒΕ равна ΑΓ. Тем самым ΑΓ больше ΑΒ, чем показано искомое.



И очевидно, что автор *Начал*, стремясь избежать сложности доказательства, отверг этот путь, предпочтя ему разделение и сведение к невозможному, поскольку он хотел утвердить обращение предыдущей теоремы без чего-либо промежуточного. Восьмая теорема, обратная к четвёртой, вызывает заметное смущение, затрудняющее опознание обращения. И предпочтительно доказывать обращение сведением к невозможному, сохраняя при этом непрерывность, нежели разрывать непрерывность предварительными доказательствами. Поэтому он почти всегда доказывает обращение сведением к невозможному.

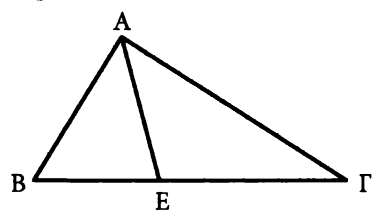
[322] XX. Во всяком треугольнике две любые стороны больше оставшейся.

Эпикурейцы хотели исключить эту теорему, утверждая, что она ясна даже ослу и не нуждается ни в каком обосновании. Ведь только невежды требуют доказывать явное и верят неявному. А тот, кто соединяет их вместе, очевидно не знает разницу между доказуемым и не требующим доказательства. А то, что эта теорема известна даже ослу, они обосновывали тем, что если сено находится на другом конце стороны, то осёл пойдёт к нему вдоль одной стороны, а не вдоль двух других. На это надо ответить, что хотя эта теорема и очевидна для ощущения, она всё же не очевидна для научного рассуждения. Многие вещи таковы; взять, к примеру, жар огня. Он очевиден для восприятия, но отыскание того, почему огонь горяч, есть дело науки: из-за бестелесной силы или же из-за телесных частей, таких как сферические или пирамидальные частицы. И снова, наше движение очевидно для ощущений, но как мы движемся, объяснить затруднительно: или без частей, или интервалами; и в последнем случае – как мы преодолеваем бесконечность, ведь каждая величина бесконечно делима. [323] И в треугольнике то, что две стороны больше одной, очевидно для восприятия, но сказать, как это получается – дело науки. И об эпикурейцах сказано достаточно.

Нам следует кратко рассказать о других доказательствах этой теоремы, в которых последователи Герона и Порфирия обошлись без продолжения прямой, как это делает автор *Начал*[79]. Пусть имеется треугольник АВГ. Следует показать, что

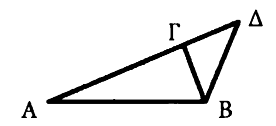
[79] Евклид доказывает эту теорему так. Докажем, что в треугольнике АВГ стороны АГ и ГВ больше стороны АВ. Продолжим АГ на ГΔ, равный ГВ. Треугольник ВГΔ – равнобедренный, поэтому угол ГВΔ

стороны АВ и АГ больше стороны ВГ. Разделим угол А пополам. Поскольку угол АЕГ – внешний в треугольнике АВЕ, он больше угла ВАЕ. Но угол ВАЕ равен углу ЕАГ. Тем самым угол АЕГ больше угла ЕАГ, так что сторона АГ больше ЕГ. Точно так же и АВ больше ВЕ; ведь угол АЕВ – внешний в треугольнике АЕГ, и он больше угла ГАЕ, а тем самым больше угла ЕАВ, так что АВ больше ВЕ. Следовательно, АВ и АГ больше ВГ. Это схожим образом показывается и для других сторон.

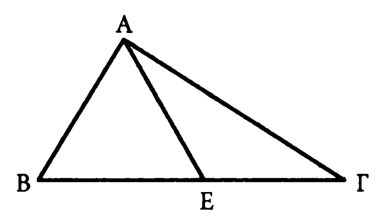


И опять, пусть имеется треугольник АВГ. Если АВГ – равносторонний, то две его стороны конечно будут больше оставшейся, ведь два из трёх равных будут вдвое больше одного. [324] Если же он равнобедренный, то его основание будет или меньше, или больше каждой из двух других сторон. Если основание меньше, то снова две стороны меньше третьей. Если основание больше, пусть ВГ будет больше, и я отложу на нём ВЕ, равную каждой из двух других сторон, и соединю АЕ. Поскольку угол АЕГ – внешний в треугольнике АЕВ, он больше угла ВАЕ. Точно так же угол АЕВ больше угла ГАЕ. Два угла

равен углу ГΔВ. Тем самым угол АВΔ больше угла АΔВ. Но против большего угла лежит большая сторона, поэтому АΔ больше АВ. Но тем самым АГ и ГВ больше АВ.

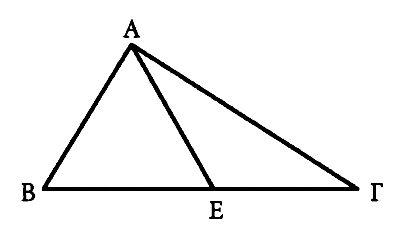


при АЕ больше целого угла А, а один из них, ВЕА, равен ВАЕ, поскольку АВ равна ВЕ. Тем самым оставшийся угол АЕГ больше угла ГАЕ, так что АГ больше ГЕ. Но АВ равна ВЕ. Следовательно, АВ и АГ больше ВГ.

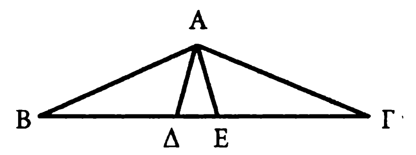


Если же АВГ – неравносторонний треугольник, пусть большей стороной будет АВ, средней – АГ, меньшей – ВГ. И бóльшая, взятая вместе с одной из двух других, всегда будет больше оставшейся, ведь она и сама больше её. Если же мы захотим показать, что АГ и ВГ больше, чем бóльшая сторона АВ, мы поступим так же, как с равнобедренным треугольником, отняв от его большей стороны длину, равную одной из других, соединив её конец с Г, и воспользовавшись внешними углами треугольников.

[325] И вновь, пусть АВГ – произвольный треугольник. Я утверждаю, что АВ и АГ больше ВГ. Ведь если нет, то они или равны, или меньше. Допустим, что равны, и отложим ВЕ, равную АВ. Тогда остаток ЕГ равен АГ. Поскольку АВ равна ВЕ, они стягивают равные углы. Точно так же, поскольку АГ равна ЕГ, они стягивают равные углы. Тем самым углы при Е равны углам при А, что невозможно.



И опять, допустим, что AB и AΓ меньше BΓ. Отложим BΔ равную AB и ΓE равную AΓ. Поскольку AB равна BΔ, угол BΔA равен углу BAΔ; и поскольку AΓ равна ΓE, угол ΓEA равен углу EAΓ. Так что два угла BΔA и ΓEA равны двум углам BAΔ и EAΓ. С другой стороны, угол BΔA является внешним в треугольнике AΔΓ, так что он больше угла ΔAΓ, и тем самым больше угла EAΓ. Точно так же, угол ΓEA является внешним в треугольнике ABE, и он больше угла BAE, и тем самым [326] больше угла BAΔ. Тем самым углы BΔA и ΓEA больше углов BAΔ и EAΓ. Но выше они были им равны, что невозможно. Тем самым AB и AΓ не равны BΓ и не меньше её, но больше. Это схожим образом показывается и для других сторон.



XXI. Если на одной из сторон треугольника из её концов внутри границ составлены две прямые, то эти составленные прямые будут меньше двух других сторон треугольника и будут заключать больший угол.

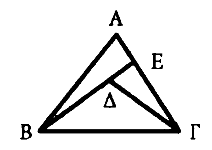
Смысл этого предложения очевиден, доказательство нашего геометра вполне ясно, и теорема вытекает из первых начал[80].

[80] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть внутри треугольника ABΓ на стороне BΓ составлены прямые BΔ и ΓΔ. Продолжим BΔ до ΔE. В треугольнике ΔEΓ стороны ΔE и EΓ больше стороны ΔΓ, и внутренний угол ΔEΓ меньше внешнего угла BΔΓ. Прибавляя BΔ, получаем, что BE и EΓ вместе больше BΔ и ΔΓ. В треугольнике ABE стороны AB и AE больше стороны BE, и внутренний угол BAE меньше внешнего угла BEΓ. Прибавляя EΓ, получаем, что BA и AΓ вместе больше BE и EΓ, которые, в свою очередь, вместе больше BΔ и

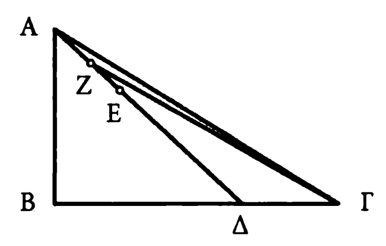
Она зависит от двух теорем, только что доказанной и шестнадцатой. Чтобы доказать, что внутренние составленные прямые меньше внешних, он пользуется теоремой о том, что две стороны треугольника больше оставшейся; а чтобы доказать, что охваченный ими угол больше угла, охваченного внешними сторонами, он пользуется тем, что во всяком треугольнике внешний угол больше внутреннего противолежащего ему угла. Мы уверимся в его геометрической строгости, а также вспомним о математических парадоксах, показав, что возможно внутри [327] треугольника составить две прямые на одной из его сторон, – причём не на целой, а только на части, – которые будут больше внешних сторон, и содержать угол, меньший угла, охваченного внешними сторонами. Тем самым прояснится необходимость, по которой автор *Начал* добавляет фразу «из её концов», чтобы внутренние составленные прямые начинались на общем основании, и составлялись на одном целом, но не на части целого. В то же время это прояснит один из геометрических парадоксов. Ведь разве не парадоксально, что прямые, составленные на целом, будут меньше, а прямые, составленные на его части, будут больше?

Пусть имеется прямоугольный треугольник АВГ с прямым углом В; возьмём на ВГ произвольную точку Δ и соединим АΔ.

ΔГ. Поэтому ВА и АГ вместе больше ВΔ и ΔГ. И поскольку угол ВАГ меньше угла ВЕГ, который, в свою очередь, меньше угла ВΔГ, тем самым угол ВАГ меньше угла ВΔГ.



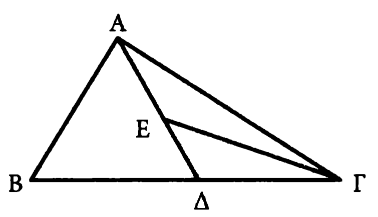
Здесь АΔ больше АВ [81]. Отложим на АΔ отрезок ΔЕ, равный АВ, разделим АЕ пополам в Z и соединим ΓZ. В треугольнике АΓZ будет АZ и ZΓ больше АΓ. Но АZ равна ZЕ, и тем самым ZЕ и ZΓ будут больше АΓ. Но ΔЕ равна АВ, и тем самым ZΓ и ZΔ будут больше АВ и АΓ, внутренние внешних.



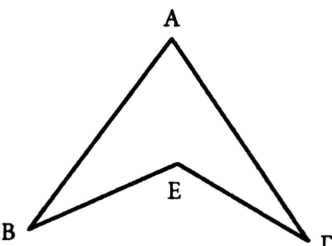
И вновь, пусть имеется [328] равнобедренный треугольник АВΓ, у которого основание ВΓ больше каждой из равных сторон, и пусть на ВΓ отложен отрезок ВΔ, равный АВ. Соединим АΔ, возьмём на АΔ произвольную точку Е и соединим ЕΓ. Поскольку АВ равна ВΔ, угол ВАΔ равен углу ВΔА; и поскольку угол ВΔА является внешним в треугольнике ЕΔΓ, он будет больше внутреннего и противолежащего угла ΔЕΓ, так что угол ВАΔ будет больше угла ΔЕΓ. И тем более угол ВАΓ будет больше угла ΔЕΓ. Но угол ВАΓ охвачен внешними прямыми, а угол ΔЕΓ – внутренними. Следовательно, ΔЕ и ЕΓ составлены внутри треугольника, и они охватывают угол, меньший того, который охватывают внешние прямые, и предложенное доказано без использования параллельных, имевшихся у комментаторов [82].

[81] Как лежащая против большего угла.

[82] Использование здесь теории параллельных линий было бы логической ошибкой, поскольку доказываемое предложение по существу не зависит от теории параллельных, и поскольку некоторые предложения теории параллельных сами могут зависеть от этой теоремы.



Так что необходимо, чтобы составленные прямые начинались в концах основания. Ведь показано, что прямые, составленные на части основания, иногда могут быть длиннее внешних сторон и охватывать меньший угол. А когда они составлены на концах, они принимают вид так называемого бородатого треугольника. И это один из геометрических парадоксов: [329] найти четырёхсторонний треугольник, к примеру. Будучи ограничен четырьмя сторонами ВА, АГ, ГЕ, ЕВ, он имеет три угла А, В, Г. Тем самым предложенная фигура является четырёхсторонним треугольником[83].



XXII. Из трёх прямых, равных трём данным прямым, составить треугольник. При этом необходимо, чтобы две прямые, взятые любым образом, всегда были больше оставшейся.

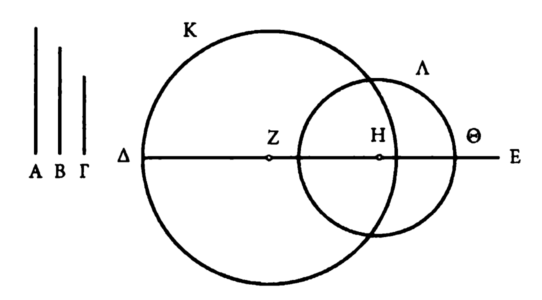
Мы вновь вернулись к задачам. Он предлагает нам для трёх прямых, любые две из которых больше оставшейся, составить

[83] Ср. 165.22. Внутренний угол в Е в таких случаях не рассматривался, и считалось, что фигура вывернута в Е «углом наружу».

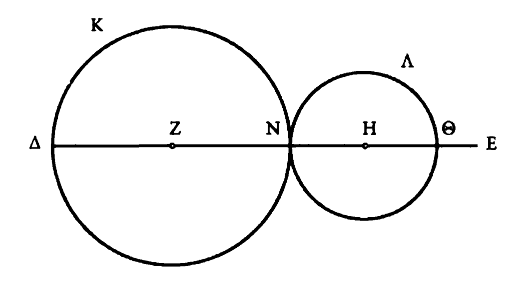
треугольник, стороны которого равны данным прямым. Прежде всего он отмечает, что невозможно построить треугольник, если брать прямые на их местах, – однако возможно, если брать равные им прямые. Затем он указывает, что из прямых, составляющих треугольник, две, взятые любым образом, должны быть больше оставшейся: ведь во всяком треугольнике две любые стороны больше оставшейся, как уже было доказано. По этой причине он добавляет, что из исходных прямых [330] две должны быть больше любой оставшейся, а иначе из равных им прямых не получится треугольник. И возможно, что он делает это добавление, чтобы отвести возражения от своего построения.

Эта задача относится к определённым, а не к неопределённым. Ведь задачи, как и теоремы, могут быть как определёнными, так и неопределёнными. Если мы скажем просто «Из трёх прямых, равных трём данным прямым, составить треугольник», она будет неопределённой и неосуществимой; но если мы добавим «чтобы две прямые, взятые любым образом, всегда были больше оставшейся», она станет определённой и осуществимой. Получается именно так: как теоремы делятся на истинные и ложные, так из задачи разделяются по их осуществимости и неосуществимости.

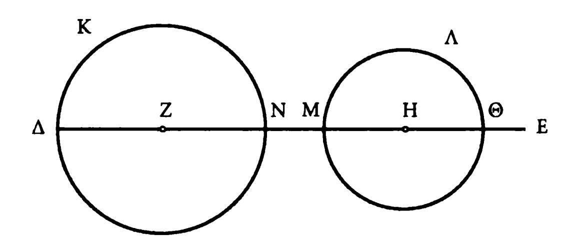
Некоторое внимание к построению учит нас тому, что возражения отводятся соблюдением строгости. Мы будем следовать сказанному нашим геометром. «Пусть имеются три прямые A, B, Г, из которых [331] любые две, взятые произвольным образом, будут больше оставшейся». И теперь мы произведём требуемое построение. «Пусть прямая ΔE ограничена с одного конца, а именно с Δ, и неограничена с другого. Отложим на ней ΔZ, равную A, ZH, равную B, HΘ, равную Г. Из центра Z раствором ZΔ проведём круг K; и опять, из центра H раствором HΘ проведём круг Λ; и пусть два круга пересекаются».



«Но почему они это делают? – спросят некоторые. – Не могут ли круги касаться друг друга, или даже не касаться? Ведь будет что-то одно из трёх: они или пересекаются, или касаются, или отделены друг от друга». Однако я утверждаю, что они с необходимостью пересекаются. Допустим сперва, что они касаются. Поскольку Z – центр круга K, ΔZ равна ZN; и поскольку H –центр круга Λ, HΘ равна HN. Но тогда две прямые ΔZ и HΘ равны одной ZH. Но они должны быть больше её, поскольку A и B вместе больше Γ, а эти равны тем.



И опять, [332] если это возможно, пусть круги будут отделены друг от друга, как. Поскольку Z – центр круга K, ΔZ равна ZN; и поскольку H –центр Λ круга, HΘ равна HM. Следовательно ZH в целом больше, чем ΔZ и ΘH. Ведь ZH превосходит ΔZ и ΘH на MN. Но ΔZ и ΘH по условию больше ZH, поскольку A и Γ вместе больше B. Ведь ΔZ равна A, ZH равна B, HΘ равна Γ. A поэтому необходимо, чтобы круги K и Λ пересекались.



Так что автор *Начал* правильно взял круги пересекающимися, поскольку он установил, что всегда две прямые из трёх, взятые любым образом, больше оставшейся, и они не равны и не меньше. И если круги касаются, две прямые обязательно будут равны оставшейся, а если разделены, то они будут больше.

[333] XXIII. На данной прямой в точке на ней построить угол, равный данному прямолинейному углу.

Эта задача тоже открыта Энопидом, как говорит Евдем. В ней требуется построить угол, равный данному прямолинейному углу, на данной прямой в данной точке на ней. Наш геометр по необходимости добавляет, что данный угол является прямолинейным, поскольку невозможно построить на прямой угол, равный всякому углу. Доказано, что только два угла, образованных дугами окружностей, равны прямолинейным углам, а именно, секирообразный, о котором показано, что он всегда равен прямолинейному углу, и лунообразный, равный двум третям от прямого угла. Такой лунообразный угол получается, когда два равных круга рассекают друг друга через центры [84].

[84] Здесь секирообразный угол – это угол между двумя дугами равных окружностей, переходящих друг в друга поворотом вокруг вершины угла – то есть частный вид того более общего угла, который раньше (190.12) был назван лунообразным. Лунообразным же углом здесь

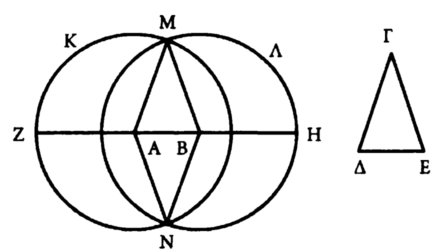
То, что угол строится на прямой, делает построение определённым, хотя по виду и не различено, будет ли он прямолинейным или смешанным; но поскольку никакой смешанный угол не может [334] быть равен прямолинейному, очевидно, что он всегда будет прямолинейным.

Автор *Начал* выполняет предложенное с помощью предыдущей задачи, в которой из трёх прямых, равных трём данным прямым, составлялся треугольник[85]. Но ты можешь выполнять построение треугольника более наставительным способом. Пусть имеются прямая AB с данной точкой A на ней, и данный прямолинейный угол ΓΔE. Нам нужно выполнить предложенное. Соединим ΓE и продолжим AB с обоих концов, до Z и H; и пусть ZA равна ΓΔ, AB равна ΔE, BH. Проведём круг K с центром A и раствором ZA, и снова проведём круг Λ с центром B и раствором BH. Эти круги пересекутся, как показано выше. Пусть они пересекутся в точках M и N, и мы соединим M с центрами, [335] и N тоже. Поскольку ZA равна AM и AN, и ZA равна ΓΔ, тем самым AM и AN равны ΓΔ. И опять, поскольку HB равна BM и BN, и HB равна ΓE, тем самым BM и BN равны ΓE. Но и AB равна ΔE. Тем самым две AB и AM равны двум ΔE и ΔΓ, и основание BM равно ΓE, так что и угол MAB равен углу Δ. И снова, две NA и AB равны двум ΓΔ и ΔE, и основание BN равно ΓE, так что и угол NAB равен углу ΓΔE. И предложенное выполнено дважды: мы построили не один, но два угла, равных

назван частный вид секирообразного угла, а именно – угол между двумя дугами равных окружностей, проходящих через центры друг друга.

[85] Евклид решает эту задачу так. На сторонах данного угла ΔΓE отметим произвольные точки Δ и E и соединим их. На данной прямой AB, ограниченной с конца A и неограниченной с конца B, строится треугольник ABZ, стороны которого соответственно равны сторонам треугольника ΓEΔ. По I.8 у этих треугольников будут равны и соответственные углы.

данному углу, каждый по свою сторону от прямой АВ, так что какую бы сторону мы не выбрали для построения, оно будет неоспоримым и неопровержимым.



Это наш вклад в построение, выполненное автором *Начал*. И мы не обсуждаем здесь доказательства Аполлония, поскольку оно опирается на теоремы, доказываемые в третьей книге. Взяв произвольный угол ΓΔΕ и прямую АВ, он проводит дугу ΓΕ с центром Δ и раствором ΓΔ, и дугу ZB с центром А [336] и раствором АВ. Далее он откладывает дугу ZB, равную ΓΕ, соединяет AZ и объявляет, что А и Δ – равные углы, как опирающиеся на равные дуги. Также он должен взять АВ равным ΓΔ, чтобы круги были равны. Однако это построение пользуется последующими предложениями[86], а потому мы считаем его не соответствующим элементарному изложению и предпочитаем построение нашего геометра, последовательно исходящее из начал.

XXIV. Если в двух треугольниках две стороны равны двум сторонам, каждая каждой, но один из охватываемых углов больше другого, то и основание в нём будет больше другого основания.

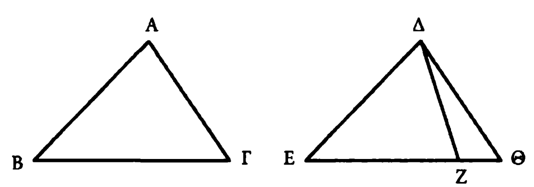
Он снова переходит к теоремам и приводит рассуждения для неравенства двух треугольников, схожие с приведёнными

[86] А именно, III.28 и III.29.

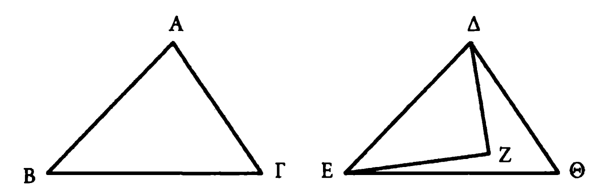
ранее для равенства. Рассматривая два треугольника с двумя попарно равными сторонами, он прежде брал углы при вершинах в обоих треугольниках равными, а теперь – неравными; и равенство углов при вершинах [337] влечёт за собой равенство оснований, равенство оснований – равенство углов при вершинах, а неравенство влечёт неравенство. Настоящая теорема противоположна четвёртой: ведь та предполагала равенство углов при вершинах, а эта – неравенство; и та доказывала равенство оснований при равенстве углов, а эта – неравенство. Она же является ведущей для следующей теоремы. Ведь та теорема в рассуждении о неравенстве переходит от оснований к углам, стягивающим эти основания, тогда как эта идёт обратно, от углов к основаниям под ними. Так что следующее предложение, будучи обратным к этому в описанном смысле, является противоположным к восьмой теореме. Ведь та по равенству оснований доказывает равенство углов при вершинах, а эта по неравенству оснований проясняет такое же неравенство углов. Из этих четырёх два, 4-е и 8-е, имеют дело с равенством, два же, это и следующее, связаны с неравенством; и два, 4-е и рассматриваемое сейчас, начинают с углов, два же, 8-е и следующее за рассматриваемым, начинают с оснований. Но во всех четырёх – 4-м, 8-м, 24-м, 25-м, – треугольники должны иметь две стороны равные двум сторонам, каждая каждой. Ведь если они не равны, искомое не будет верным, и нас постигнет разочарование. Вот то общее, что касается этих предложений.

[338] Теперь мы рассмотрим построение, которое автор *Начал* даёт для этой теоремы, и восполним упущенное. Он берёт два треугольника ΑΒΓ и ΔΕΖ имеющие соответственно равные стороны ΑΒ и ΒΓ, ΔΕ и ΔΖ, и угол Α больше угла Δ. Чтобы доказать, что ΒΓ больше ΕΖ, он строит на ΔΕ в точке Δ на ней угол ΕΔΘ, равный углу Α, – большему из углов Α и Δ, – и откладывает ΔΘ, равную ΒΓ. При продолжении прямой ΕΖ точка Θ или попадает на эту прямую, или оказывается над ней, или под

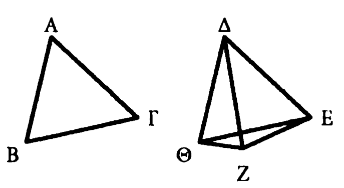
ней. Автор *Начал* берёт её лежащей над ней[87]. Но пусть точка Θ лежит на прямой. Тогда мы докажем это снова. Пусть AB и BΓ равны ΔE и ΔΘ, и они охватывают равные углы. И основание BΓ равно EΘ. Но EΘ больше EZ, поэтому BΓ больше EZ.



Но пусть теперь точка Θ лежит под EZ. Проведя EΘ, мы скажем, что AB и BΓ равны ΔE и ΔΘ, и они охватывают равные углы, [339] так что и BΓ равна EΘ. И поскольку прямые ΔZ и ZE составлены внутри треугольника EΔΘ на ΔE, тем самым они меньше внешних. Но ΔΘ равна ΔZ, как равные BΓ; поэтому EΘ больше EZ. Однако EΘ равна BΓ, и поэтому BΓ больше EZ. Так что теорема доказана для каждого положения.

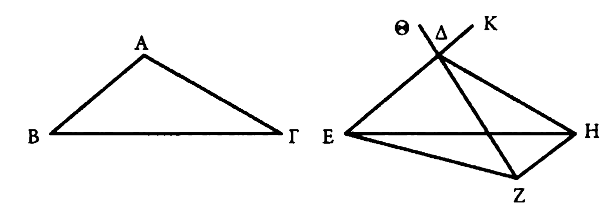


[87] Евклид доказывает эту теорему так. Построенный треугольник ΔΘE равен треугольнику ABΓ по двум сторонам и углу между ними, поэтому ΘE равна BΓ. Треугольник ΔΘZ – равнобедренный, поэтому угол ΔΘZ равен углу ΔZΘ. Угол EΘZ меньше угла ΔΘZ, а угол ΘZE больше угла ΔZΘ; поэтому угол EΘZ меньше угла ΘZE. Но в треугольнике ΘZE против большего угла лежит большая сторона, поэтому ΘE больше ZE, и тем самым BΓ больше ZE.



Поскольку в четвёртой теореме наш автор добавляет также, что равны площади треугольников, почему он здесь к неравенству оснований не добавляет неравенство площадей? На это затруднение следует ответить, что рассуждение для равных и неравных углов и оснований не было одним и тем же. Равенство углов и оснований влекло за собой равенство треугольников. [340] Но когда они не равны, отсюда не следует с необходимостью неравенство площадей, ведь треугольники могут быть равными или неравными, и треугольник, имеющий бóльшие угол и основание, сам может быть бóльшим или меньшим. Поэтому автор *Начал* исключает сравнение треугольников, отчасти оттого, что эта теория имеет дело с параллельными прямыми. Но поскольку нам следует произвести сравнение площадей сейчас, мы допустим то, что будет доказано позднее. Мы утверждаем, что если углы А и Δ равны двум прямым – я говорю здесь о том построении, которое выполнено в *Началах*, – то треугольники будут равны; если они больше двух прямых, то треугольник с бóльшим углом будет меньшим, и если меньше – он будет бóльшим.

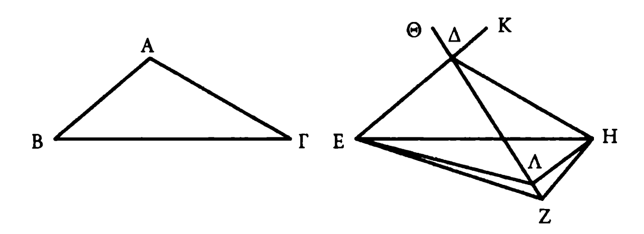
Пусть выполнено построение из *Начал* и продолжены ЕΔ и ZΔ. Допустим, что углы ВАГ и ЕΔН равны двум прямым. Поскольку угол ВАГ равен углу ЕΔZ, углы ЕΔZ и ЕΔН равны двум прямым. Но углы ЕΔН и КΔН также равны двум прямым. Вычтем общий угол ЕΔН, – тем самым будут равны остатки ЕΔZ и НΔК. [341] Но углы ЕΔZ и ΘΔК равны как вертикальные, и тем самым угол НΔК равен углу ΘΔК. И поскольку угол НΔΘ является внешним в треугольнике НΔZ, он равен двум противоположным углам Н и Z. Но они равны между собой, ведь ΔН равна ΔZ. Тем самым угол НΔΘ будет удвоенным в сравнении с углом Н. Угол Н равен углу НΔК, и они – накрестлежащие; поэтому ZН параллельна ΔЕ. Следовательно, треугольники НΔЕ и ZΔЕ находятся на одном основании ΔЕ и между одними параллельными ΔЕ и НZ. Тем самым они равны. Но ΔЕZ равен АВГ, поэтому ΔНЕ равен АВГ.



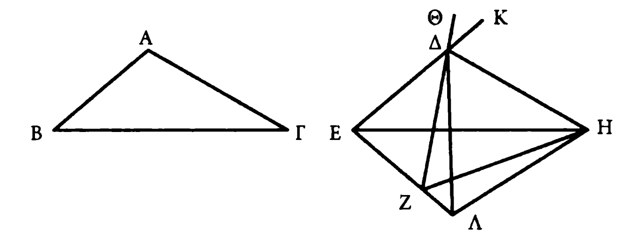
Ты видишь, что нам здесь нужны три теоремы, связанные с параллельными: одна – что во всяком треугольнике внешний угол равен двум внутренним и противолежащим [88]; вторая – что если прямая, падая на две прямые, образует с ними равные накрестлежащие углы, то эти прямые параллельны [89]; третья – что треугольники на одном основании и между одними параллельными равны [90]. Автор *Начал* знает об этом и поэтому опускает сравнение треугольников.

Пусть теперь углы ВАГ и ЕΔZ будут больше двух прямых, и выполнено то же самое построение. Поскольку углы ВАГ и ЕΔZ, то есть углы ЕΔН и ЕΔZ, больше двух [342] прямых, и углы ЕΔН и НΔK равны двум прямым, вычитая общий угол ЕΔН, получаем, что угол ЕΔZ больше угла НΔK, тем самым угол KΔΘ больше угла НΔK. Тем самым угол НΔΘ, двойной в сравнении с углом Н, больше двойного угла НΔK. Тем самым угол НΔK меньше угла Н. Построим угол ΔНΛ, равный углу НΔK, и соединим ЕΛ. НΛ будет параллельна ΔЕ. Треугольники НΔЕ и ΛΔЕ будут равны. Но треугольник ΛΔЕ меньше треугольника ZΔЕ, так что треугольник ZΔЕ будет больше треугольника НΔЕ. Однако треугольники ΔЕН и АВГ равны. Поэтому треугольник АВГ, имеющий больший угол, меньше треугольника ZΔЕ.

[88] Предложение I.32.
[89] Предложение I.27.
[90] Предложение I.37.



В третьём случае возьмём углы меньшими двух прямых, и выполним то же самое построение. И поскольку углы ΕΔΗ и ΗΔΚ равны двум прямым, [343] вычтем общий угол ΕΔΖ. И угол ΕΔΖ, то же что ΚΔΘ, меньше чем ΗΔΚ. Тем самым целый угол ΗΔΘ меньше удвоенного угла ΗΔΚ. Но это также двойной угол Η. Тем самым угол ΗΔΚ больше угла Η. Построю угол ΔΗΛ, равный углу ΗΔΚ, и пусть ΗΛ встречается с ΕΖ в Λ; соединю также ΔΛ. ΗΛ будет параллельна ΔΕ. Так что треугольники ΗΔΕ и ΛΔΕ равны между собой. Но треугольник ΛΔΕ больше ΖΔΕ, и ΗΔΕ равен ΑΒΓ. Поэтому ΑΒΓ больше ΔΕΖ.



Так что показано, что треугольник ΑΒΓ равен, больше либо меньше ΔΕΖ, когда углы Α и Δ равны двум прямым, больше двух прямых или меньше. И все эти предположения возможны. [344] Пусть Α равен полутора прямым углам, и Δ – половине прямого: разве они не равны двум прямым? И когда Α равен полутора прямым углам и Δ –прямому углу, разве они не больше двух прямых? И когда Α равен полутора прямым углам и Δ – трети прямого, разве они не меньше двух прямых? И в каждом из этих случаев Α больше Δ. Во всех этих случаях мы

пользовались параллельными прямыми. И автор *Начал* по необходимости их исключил.

XXV. Если в двух треугольниках две стороны равны двум сторонам, каждая каждой, но одно из оснований больше другого, то и охватываемый равными прямыми угол в нём будет больше другого такого же угла.

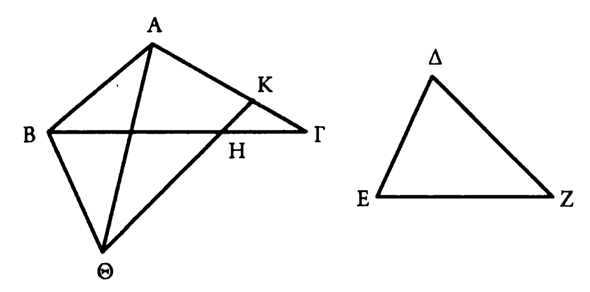
Эта теорема противоположна восьмой и обратна предыдущей. Автор начал представляет эти теоремы связками, и одна пара имеет дело с равенством углов и сторон, а другая – с неравенством; и в каждой связке имеется как ведущая теорема, так и обратная ей, [345] и ведущая теорема пользуется прямым доказательством, а обратная – сведением к невозможному. И так он по одному рассматривает каждый треугольник: в этих показывая, что равенство сторон влечёт равенство стянутых ими углов, и так же неравенство, а в тех – наоборот, что равенство углов влечёт равенство стягивающих сторон, а неравенство влечёт неравенство.

Что касается предложенной теоремы, мы оставляем любознательным ученикам отыскать в книгах, как её доказывал наш геометр, поскольку это им вполне доступно[91]. Мы же кратко опишем доказательства, которые этой теореме дали другие, и начнём с того, которое открыл и установил Менелай Александрийский[92]. Пусть ΑΒΓ и ΔΕΖ – два треугольника, в кото-

[91] Евклид доказывает эту теорему сведением к невозможному, перебирая случаи. Угол против большего основания будет или равен углу против меньшего основания, или меньше, или больше. Но если он равен, то равны и основания; и если он меньше, то меньше и основание. Но основание больше, поэтому и угол будет больше.

[92] Менелай Александрийский (2-я половина I в. до н. э.) известен своей *Сферикой*, в которой были развиты элементы сферической геометрии. Он написал также *Начала*, отрывок из которых, возможно,

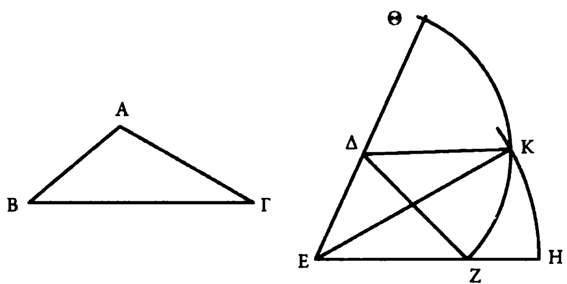
рых две стороны АВ и ВГ равны двум сторонам ΔЕ и ΔZ, и ВГ больше ЕZ. Я утверждаю, что угол А больше угла Δ. Пусть на ВГ отложена ВН, равная ЕZ, и в точке В построен угол НВΘ, равный ΔЕZ, и ВΘ равна ΔЕ. Соединим НΘ, продолжим [346] её до К, и соединим АΘ. Поскольку ВН равна ЕZ и ВΘ равна ЕΔ, две равны двум, и равны охватываемые ими углы, тем самым НΘ равна ΔZ, и угол ВΘН равен углу ЕΔZ. И поскольку НΘ равна ΔZ, и ΔZ равна АГ, тем самым НΘ равна АГ. Далее, ΘК длиннее АГ и тем более длиннее АК. Поэтому угол КАΘ больше угла КΘА. И опять, поскольку ВΘ равна АВ, ибо они обе равны ΔЕ, угол ВΘА равен углу ВАΘ. Тем самым целый угол АВК больше целого угла ВΘК, но показано, что целый угол ВΘК равен углу Δ. Тем самым угол ВАГ больше угла ЕΔZ. Таково доказательство Менелая.



Герон-механик тоже доказал эту же теорему без сведения к невозможному. Пусть имеются два треугольника АВГ и ΔЕZ, и сделано то же предположение. Поскольку ВГ больше ЕZ, продолжим ЕZ и отложим ЕН, равную ВГ. Сходно продолжим ΔЕ и отложим ΔΘ, равную ΔZ. Проведём круг ΘКZ с центром Δ и раствором ΔZ, [347] проходящий через Θ. И поскольку АГ и АВ вместе больше ВГ, и они вместе равны ЕΘ, и ЕН равна ВГ, круг НК с центром Е и раствором ЕН пересечёт ЕΘ. Соединим

цитирует Прокл.

точку пересечения с центрами кругов прямыми КΔ и КЕ. Поскольку Δ – центр ΘKZ, тем самым ΔК равна ΔΘ, а тем самым и ΔZ и АГ. И опять, поскольку Е – центр НК, тем самым ЕК равна ЕН, а тем самым и ВГ. И поскольку две АВ и АГ равны двум ΔЕ и ΔК, и ВГ равна ЕК, тем самым угол ЕΔК равен углу ВАГ. Поэтому угол ВАГ больше угла ΔZE.

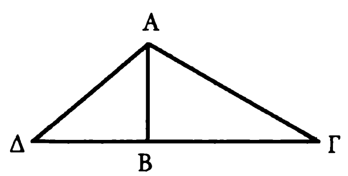


XXVI. Если в двух треугольниках два угла равны двум углам, каждый каждому, и одна сторона равна одной стороне, а именно, или сторона при равных углах, или сторона, стягивающая один из равных углов, то и оставшиеся стороны будут равны оставшимся сторонам, и оставшийся угол будет равен оставшемуся углу.

Всякий, кто захочет сравнить треугольники по их сторонам, углам и площадям, по необходимости или возьмёт только равенство сторон и будет искать равенство [348] углов, или возьмёт только равенство углов и будет искать равенство сторон, или смешает углы и стороны. Взяв только равенство углов, он не сможет доказать, что стороны треугольника равны. Ведь мельчайшие треугольники могут иметь равные углы с величайшими, так что стороны и охватываемые площади у них будут меньше, а углы по одному – равными. Предположив только равенство сторон, он докажет равенство всего по восьмой теоре-

ме, ведь если в двух треугольниках две стороны равны каждая каждой и основание равно основанию, то треугольники будут иметь равные углы и охватывать равные площади. Автор *Начал* не делает этого добавления, поскольку оно с необходимостью вытекает из четвёртой теоремы и не требует доказательства.

Взяв стороны и углы, он возьмёт или одну сторону, равную одной стороне, и один угол равный одному углу; или одну сторону и два угла; или наоборот, один угол и две стороны; или один угол и три стороны; или одну сторону и три угла; или более одной стороны и более одного угла. Но, взяв один угол и одну сторону, он не докажет предложенное равенство других. Ведь два треугольника могут иметь равными одну сторону и один угол, а все остальные их элементы будут неравными. [349] К примеру, пусть прямая АВ установлена под прямым углом к ГΔ, и ВΔ больше ВГ, и соединены АГ и АΔ. В этих треугольниках имеется одна общая сторона и по одному равному углу, но все остальные их элементы будут неравными. Но можно взять равными одну сторону и два угла и доказать равенство прочего, что он и делает в этой теореме.



А брать равными одну сторону и три угла будет излишне, ведь для равенства остального достаточно равенства двух углов. И опять, по одному равному углу и двум сторонам равенство прочего доказывается в четвёртой теореме. А брать равными один угол и три стороны будет излишне, ведь для равенства остального достаточно равенства двух сторон. Наконец, брать равными две стороны и два угла, или две стороны и три угла, или два угла и три стороны, – всё это излишне. Ведь следующее из меньшего числа предположений всегда следует

и из большего их числа, если только взятые предположения разделены надлежащим образом.

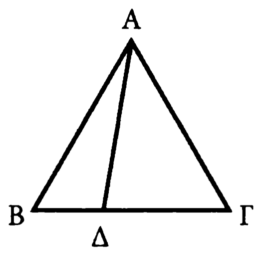
Так что надо доказать лишь три предположения: когда берутся только три стороны, или две стороны и один угол, или наоборот одна сторона и два угла, что и делает наш геометр[93]. [350] Поэтому имеются только три теоремы о равенстве треугольников по их сторонам и углам, а все прочие предположения оказываются или недостаточными для доказательства искомого, ли достаточными, но избыточными, поскольку то же самое доказывается их меньшего числа предположений.

И когда наш автор берёт две стороны равными двум сторонам и угол равный углу, он берёт не случайный угол, но, как он добавляет, «охватываемый равными прямыми»; так же как когда он берёт два угла равными двум углам и одну сторону равную одной стороне, он берёт её не случайно, но так, что это «или сторона при равных углах, или сторона, стягивающая один из равных углов». Ведь и в четвёртой теореме нельзя взять случайный угол[94], и в этой теореме нельзя взять случайные стороны, чтобы доказать, что остальные части равны. Пусть в равностороннем треугольнике ΑΒΓ прямая ΑΔ делит сторону ΒΓ на неравные части. Получаются два треугольника, в которых стороны ΑΒ и ΑΔ равны сторонам ΑΓ и ΑΔ, и один угол Β равен одному углу Γ. Но оставшиеся стороны ΒΔ и ΓΔ не равны (они взяты неравными), и оставшиеся углы не равны

[93] Евклид доказывает настоящую теорему сведением к невозможному, разбирая последовательно все случаи, и избегая короткого доказательства наложением.

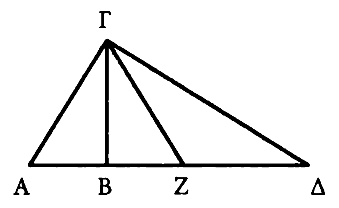
[94] Прокл не упоминает здесь те дополнительные условия, при которых два треугольника оказываются равными по двум сторонам и углу, противолежащему одной из сторон. Это тем более странно, поскольку такая теорема была доказана Менелаем в *Сферике* (I.13).

тоже. Причина этого в том, что мы не взяли за равные углы те углы, которые охвачены [351] равными сторонами.



По этой же причине настоящая теорема также окажется ошибочной, если мы не примем во внимание наложенное ограничение, согласно которому равная сторона должна или стягивать один из равных углов, или находиться при равных углах. Пусть имеется прямоугольный треугольник АВГ с прямым углом В, в котором ВГ больше АВ. Продолжим АВ, и построим на ВГ в точке Г угол ВГΔ, равный углу ВАГ; и пусть АВ и ГΔ при продолжении встречаются в Δ. Треугольники АВГ и ВГΔ имеют одну общую сторону ВГ и два равных угла: ведь углы АВГ и ГВΔ равны как прямые, а углы ВАГ и ВГΔ равны по построению. И кажется, что треугольники равны. Но мы покажем, что ВГΔ больше АВГ. Причина этого в том, что мы взяли общую сторону ВГ, которая в треугольнике АВГ стягивает один из равных углов, угол А, а в треугольнике ВГΔ она находится при равных углах. А она в обоих случаях должна или стягивать один из равных углов, или лежать при равных углах. Поскольку мы этого не учли, мы объявили равным треугольник, [352] который по необходимости был бóльшим. И почему бы ВГΔ не быть больше АВГ? В точке Г на прямой ВГ построим угол ZГВ, равный углу АГВ. И угол ВГΔ, как и угол А, будет больше угла АГВ. И поскольку в двух треугольниках АВГ и ВГZ два угла АВГ и ВГА равны двум углам ГВZ и ВГZ, каждый каждому, и при этих углах имеется одна общая сторона ВГ, эти треугольники равны. И поскольку ВГΔ больше ВГZ, он

больше АВГ. Так что наше доказательство равенства проваливается, если сторона взята случайно.



Вклад в наше точное понимание этого принадлежит Порфирию, а Евдем в *Истории геометрии* возводит эту теорему к Фалесу. Ведь чтобы найти расстояние до кораблей в море тем способом, который приписывается Фалесу, необходимо её использовать.

Из предыдущего разделения мы получили обзор всей теории равенства треугольников, и объяснили, что некоторые предположения отсутствуют по причине их недостаточности или избыточности. На этом первый отдел *Начал* заканчивается. Автор построил треугольники и сравнил их в отношении равенства [353] и неравенства, установив их существование построением, а их равенство и различие – сравнением. Существование имеет три стороны: бытие, тождество и инаковость, и они и количественны, и качественны, сообразно особенностям предмета. В этих предложениях он показал, что всё тождественно с собой и всё тождественно с другим через множественность; и всё тождественно с другим, а другое – между собой. Ведь равенство и неравенство обнаруживается и в каждом отдельном треугольнике, и когда их больше одного.

ПРЕДЛОЖЕНИЯ: Часть 2

[354] Мы уже научились всему, что в сочинении о началах можно сказать о порождении треугольников, об их равенстве и неравенстве. Евклид далее проходит мимо четырёхсторонних фигур, напрямую обучая нас тому, что касается параллелограммов, но включая в эту теорию и своё учение о трапециях. Ранее в предположениях четырёхсторонники были разделены на параллелограммы и трапеции, и параллелограммы – опять на несколько разных видов, равно как и трапеции. Поскольку параллелограмм из-за равенства причастен правильности, тогда как трапеция не имеет ни такого же, ни схожего порядка, естественно, что сначала он говорит о параллелограммах, а трапеции рассматривает уже в связи с ними. Ведь трапеция появляется при рассечении параллелограммов, как это будет видно ниже.

[355] Далее, о составлении параллелограммов и о их равенстве невозможно ничего сказать без теории параллельных. Ведь ясно уже из названия, что параллелограмм ограничен параллельными противоположными прямыми. Поэтому по необходимости он начинает обучение с параллельных и, после короткого прохода, переходит к теории параллелограммов, используя для связи между двумя частями *Начал* теорему, которая касается одного из свойств параллельных, но попутно рассказывает и о первом способе построения параллелограммов. Эта теорема гласит: «Прямые, соединяющие равные и параллельные прямые с одной стороны, сами будут параллель-

ными»[1]. И хотя эта теорема рассматривает свойство равных и параллельных прямых, по сопричастности она показывает, что параллелограмм имеет равные и параллельные противоположные стороны.

Отсюда ясно, что учение о параллельных линиях необходимо излагать первым. Параллельным присущи три свойства, и эти характеристики выводятся друг из друга. Мы рассмотрим их не вместе, но по отдельности. Одно из них состоит в том, что когда прямая пересекает параллельные, накрестлежащие углы равны; другое – что когда прямая пересекает параллельные, [356] внутренние углы равны двум прямым; третье – что когда прямая пересекает параллельные, наружный угол равен противоположному внутреннему углу. Каждый из этих признаков, будучи доказанным, показывает, что прямые параллельны.

Таким способом рассуждали о линиях и другие математики, обсуждая признаки каждого вида. Ведь и Аполлоний показывает признаки (σύμπτωμα) каждой из конических линий, и Никомед для конхоид, и Гиппий для квадратрис, и Персей для спирик. После построения мы отделяем вид от всех других путём указания присущих ему свойств. Таким образом, автор *Начал* сначала отыскивает признаки параллельных.

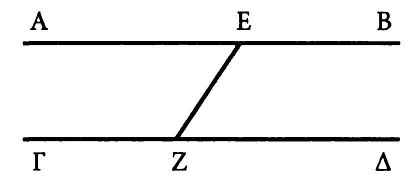
XXVII. Если прямая, падая на две прямые, образует с ними равные накрестлежащие углы, то эти прямые параллельны между собой.

Здесь по обыкновению считается, что прямые лежат в одной плоскости, как и во всех теоремах плоской геометрии. Я добавил это замечание, потому что прямые, образующие равные накрестлежащие углы, не всегда оказываются параллельными,

[1] Предложение I.33.

если они не лежат в одной [357] плоскости. Если две прямые скрещиваются, одна в одной плоскости и другая в другой, ничто не мешает падающей на них прямой образовывать с ними равные накрестлежащие углы, хотя такие прямые не будут параллельными. Так что надо начать с того, что всё, о чём мы пишем в плоской геометрии, мы представляем лежащим в одной плоскости. А потому это добавление делать не обязательно.

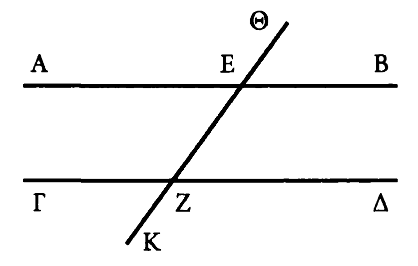
А о слове «накрестлежащий» (ἐναλλὰξ) следует знать, что наш геометр употребляет его в двух смыслах: как нечто лежащее определённым образом и как нечто, относящееся к последовательности отношений. В этом последнем смысле оно употребляется в пятой книге и в арифметических книгах; но в этой книге и во всех местах, где речь идёт о параллельных прямых, пересечённых прямой, оно употребляется в первом смысле. Углы, произведённые не по одну сторону и не следующие друг за другом, но разделённые секущей и лежащие внутри параллельных по разные стороны от неё, он называет накрестлежащими. Так если имеются прямые AB и ΓΔ и секущая EZ, накрестлежащими называются углы AEZ и ΔZE, и также ΓZE и BEZ, потому что они противоположны по положению.



Надо также понимать, [358] что когда прямые располагаются таким образом, всего производится шесть вариантов, но из них наш геометр берёт только три, а три отбрасывает. Ведь можно брать углы по одну сторону и не по одну сторону. И если они односторонние, то либо оба они лежат внутри прямых, как в доказательстве утверждения о параллельных, либо оба снаружи, либо один внутри, а другой снаружи. И если не

односторонние, то опять либо оба снаружи, либо оба внутри, либо один внутри, а другой снаружи.

Это поясняется соответственным чертежом. Путь даны прямые AB и ΓΔ и секущая EZ, продолженная до Θ и K. Пусть берутся односторонние углы; и если они оба внутри, то это углы BEZ и EZΔ, или AEZ и EZΓ; если они оба снаружи, то это углы ΘEB и ΔZK, или ΘEA и ΓZK; и если один снаружи, а другой внутри, то это углы ΘEB и EZΔ, или KZΔ и ZEB, или ΘEA и EZΓ, или KZΓ и AEZ, всего четыре положения. А если углы не будут односторонними, то, если они оба внутри, это углы AEZ и EZΔ, или ΓZE и ZEB; [359] если оба снаружи, это углы AEΘ и ΔZK, или ΘEB и ΓZK; а если один внутри, а другой снаружи, опять имеются четыре положения, или AEΘ и EZΔ, или ΘEB и EZΓ, или KZΓ и ZEB, или KZΔ и ZEA. И других вариантов уже нет.



Из этих шести сочетаний углов наш геометр выбирает только три, и рассматривает их как характеристические признаки параллельных. В одном из трёх случаев углы не лежат по одну сторону; и тогда берутся только углы, лежащие внутри, которые и называются накрестлежащими; а случаи, когда оба угла лежат внутри и когда один лежит внутри, а другой снаружи, отбрасываются. Если же углы лежат по одну сторону, он рассматривает варианты, когда оба угла лежат внутри (и он говорит, что они равны двум прямым) и когда один угол лежит внутри, а другой снаружи (и он говорит, что они равны); а отбрасывается случай, когда оба угла лежат снаружи.

Сейчас мы скажем о том, что следует из принятых посылок. Пусть углы ΘEB и ΓZK – внешние односторонние. Я утверждаю, что оба они равны двум прямым. Ведь если EZΔ равен ΘEB, и BEZ равен ΔZK, и углы BEZ и EZΔ равны двум прямым, то тогда и углы ΔZK и ΘEB равны двум прямым. И опять, [360] пусть углы AEΘ и EZΔ лежат по разные стороны, и один снаружи, а другой внутри. Я утверждаю, что оба они равны двум прямым. Ведь если AEΘ равен BEZ, и углы BEZ и EZΔ равны двум прямым, то тогда и углы AEΘ и EZΔ равны двум прямым. И опять, пусть углы AEΘ и ΔZK – внешние разносторонние. Я утверждаю, что они равны между собой. Ведь AEΘ и BEZ равны между собой, и так же ΔZK и BEZ, так что AEΘ и ΔZK тоже равны между собой.

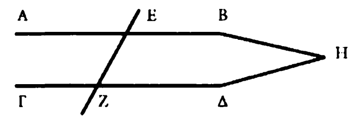
И выводы их посылок, принятых нашим геометром, все будут такими же, как и из оставшихся трёх, за исключением того, что в двух случаях у нашего геометра указанные углы равны между собой, а в одном – равны двум прямым; и наоборот, в двух оставшихся случаях они будут равны двум прямым, а в одном – равны между собой. Так что углы в трёх случаях из шести будут равны двум прямым и в трёх – равны между собой. Ведь рассмотренные и отставленные случаи естественно состоят в обратной связи. Похоже, что наш геометр выбрал из этих предположений те, которые были более частыми; и поэтому из не лежащих по одну сторону он взял только внутренние углы, называемые накрестлежащими, а из односторонних – случай двух внутренних углов и случай, когда один угол внешний, [361] а другой – внутренний; прочие же случаи он счёл худшими или слишком пёстрыми. Но какова бы ни была причина этого, ясно, сколько всего имеется случаев[2].

[2] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть две прямые AB и ΓΔ пересекаются прямой EZ, и при этом накрестлежащие углы AEZ и

XXVIII. Если прямая, падающая на две прямые, образует внешний и внутренний односторонние углы, равные между собой, или внутренние односторонние углы, равные двум прямым, то прямые будут параллельными.

В предыдущей теореме брались углы, не лежащие по одну сторону, внутренние для этих прямых, и доказывалось, что если эти углы равны между собой, то прямые параллельны; здесь этот же вывод делается из двух других посылок, и в одном из них [односторонние] углы разделяются на внешний и внутренний, а в другом оба угла берутся внутренними. Кажется, что автор *Начал* делит теоремы недопустимым образом. Или ему следовало взять все три посылки по отдельности и получить три теоремы, или их надо было собрать в одну теорему, как это делает Айгей из Гиераполиса[3] в *Кратком изложении Начал*; а уж если он хотел делить их на две, ему следовало произвести это деление в соответствии с посылками, и в одной

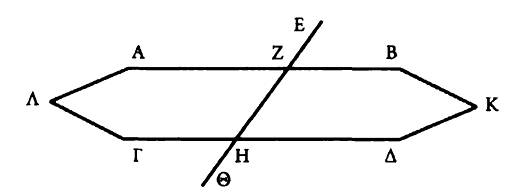
EZΔ равны между собой. Нам надо доказать, что прямые AB и ΓΔ параллельны. Допустим, что при продолжении со стороны B и Δ они встречаются в точке H, образуя треугольник EHZ. Поскольку внешний угол треугольника больше любого внутреннего, с ним не смежного, угол AEZ должен быть больше угла EZΔ. Однако эти углы равны. В силу возникшего противоречия прямые AB и ΓΔ в точке H встретиться не могут. Сходным образом доказывается, что они не могут встретиться и по другую сторону от EZ. Но прямые, которые не встречаются при их неограниченном продолжении в обе стороны, параллельны по определению.



[3] О нём ничего более не известно.

рассмотреть случаи, когда углы равны между собой, а в другой – когда углы равны двум прямым. [362] Но вместо этого он в одной теореме предполагает равенство накрестлежащих углов, а в другой – равенство внутреннего и внешнего углов между собой, а также равенство внутренних односторонних углов двум прямым. Какова же причина такого разделения? Ясно, что это не равенство углов между собой, и не равенство их двум прямым, – ведь такой критерий не отделяет теоремы друг от друга. Но тогда это расположение углов по одну сторону либо по разные стороны. Ведь в предыдущей теореме они лежали по разные стороны, когда были накрестлежащими, а в этой они очевидно лежат по одну сторону[4].

Как автор *Начал* доказывает, что если внутренние углы равны двум прямым, то прямые параллельны, ясно из написанного. А Птолемей в книге, где он пытается доказать, что прямые, образующие углы, меньшие двух прямых, при продолжении встречаются с той стороны, где эти углы меньше двух прямых, начинает с доказательства теоремы о том, что если внутренние углы равны двум прямым, то прямые параллельны; и делает он это так.



«Пусть имеются две прямые AB и ΓΔ, и пусть они пересекаются прямой EZHΘ, и при этом углы BZH и ZHΔ равны

[4] Естественнее всё же считать, что в предыдущей теореме доказывался один исходный признак параллельных прямых, а в этой теореме всего лишь делались дополнительные выводы из только что доказанного.

двум прямым. Я утверждаю, что эти прямые параллельны, то есть они не встречаются. [363] Допустим, что ZB и HΔ при продолжении встречаются в K. Тогда, поскольку прямая HZ падает на AB, она образует углы AZH и BZH, равные двум прямым. Подобным образом, поскольку HZ падает на ΓΔ, она образует углы ΓHZ и ΔHZ, равные двум прямым. Тем самым четыре угла AZH, BZH, ΓHZ, ΔHZ равны четырём прямым. Но два из них, BZH и ZHΔ, по условию равны двум прямым. Так что и оставшиеся два угла AZH и ΓHZ равны двум прямым. Но если ZB и HΔ образуют углы, равные двум прямым и при продолжении встречаются в K, то и ZA и HΓ при продолжении тоже встречаются. Ведь углы AZH и ΓHZ равны двум прямым. Так что прямые линии либо встречаются с обеих сторон, либо ни с одной, если они образуют два прямых угла. Допустим, что ZA и HΓ встречаются в Λ. Тогда прямые ΛABK и ΛΓΔK охватывают площадь, что невозможно. Так что невозможно, чтобы две прямые встречались, когда внутренние односторонние углы равны двум прямым. Следовательно, они параллельны.»

[364] XXIX. Прямая, падающая на параллельные прямые, образует равные между собой накрестлежащие углы, равные между собой внутренний и внешний односторонние углы, а также внутренние односторонние углы, равные двум прямым.

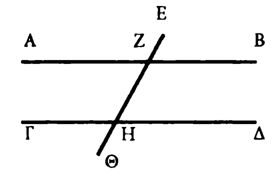
Эта теорема обратна к обеим предыдущим теоремам. Ведь их заключения стали здесь посылками, и их данные здесь предлагается доказать. Сделаем дополнительное замечание о различении обратных: всё обратное обратно к одному, как в пятой и шестой теоремах, либо более чем к одному, как в предложенной здесь. В этой теореме автор *Начал* впервые использует следующий постулат: «Если прямая линия, падая на две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух пря-

мых, то при продолжении эти прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых»[5].

Как я уже заметил в предварительном обзоре, не все согласны с тем, что это общепринятое утверждение является недоказуемым. Как такое может быть, если обратное к нему находится среди теорем и является доказуемым? Ведь теорема о том, что во всяком треугольнике любые два внутренних угла меньше двух прямых[6], является обратной к этому постулату. Однако, как я уже сказал ранее[7], тот факт, что две прямые при их продолжении подходят друг к другу [365] всё ближе и ближе, не является признаком того, что они встречаются; ведь для других линий было найдено, что они сходятся всё ближе и ближе, но не встречаются.

Так что некоторые до нас считали, что это утверждение, которое автор *Начал* принимает за постулат, является теоремой, и требовали его доказательства. Птолемей полагал, что он доказал его в книге *О том, что прямые, образующие*

[5] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть параллельные прямые AB и ΓΔ пересечены прямой EZHΘ. Докажем, что углы BZH и ZHΔ равны двум прямым. В самом деле, они либо меньше двух прямых, либо больше двух прямых, либо равны двум прямым. Если они меньше двух прямых, то по пятому постулату они встречаются со стороны B, Δ. Если они больше двух прямых, то по пятому постулату они встречаются со стороны A, Γ. Но прямые AB и ΓΔ не встречаются по условию. Следовательно, углы BZH и ZHΔ равны двум прямым.



[6] Предложение I.17.
[7] 192.1–193.2.

углы, меньшие двух прямых, встречаются. В доказательстве он использовал многие теоремы, доказанные автором *Начал* ранее этой. Чтобы не увеличивать нашу работу, мы допустим, что все они истинны, и примем в качестве леммы, что все они уже доказаны.

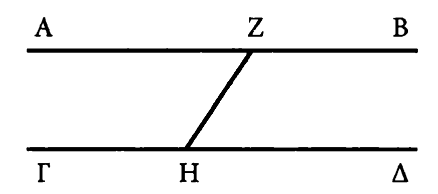
«Одно из уже доказанных предложений гласит, что прямые, образующие два прямых угла, при продолжении никогда не встречаются [8]. Я утверждаю, что обратное тоже верно, а именно, что если параллельные прямые пересечены ещё одной прямой, то внутренние односторонние углы равны двум прямым. Ведь необходимо, чтобы при пересечении параллельных получались углы, либо равные двум прямым, либо меньшие двух прямых, либо бóльшие.

Пусть AB и ΓΔ – параллельные, и ZH – секущая. Я утверждаю, что внутренние односторонние углы не могут быть больше двух прямых. Ведь если углы AZH и ΓHZ больше двух прямых, [366] то оставшиеся углы BZH и ΔHZ меньше двух прямых. Но эти углы также больше двух прямых: ведь AZ и ΓH не более параллельны, чем ZB и HΔ, так что если прямая, падающая на AZ и ΓH, образует внутренние углы, бóльшие двух прямых, то и прямая, падающая на ZB и HΔ, образует внутренние углы, бóльшие двух прямых [9]. Но эти же самые углы меньше двух прямых (поскольку четыре угла AZH, ΓHZ, BZH, ΔHZ равны четырём прямым), что невозможно. Схожим образом мы можем доказать, что при пересечении параллельных не образуется внутренних односторонних углов, меньших двух прямых.

[8] Доказательство Птолемеем этого предложения см. 362.20–363.18.

[9] Этот вывод ничем не обоснован, на что Прокл указывает ниже (368.8). Почему углы с одной стороны не могут быть больше двух прямых, а с другой меньше?

И поскольку они не могут быть ни больше, ни меньше двух прямых, остаётся заключить, что секущая образует внутренние односторонние углы, равные двум прямым.

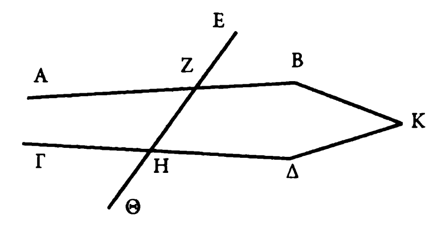


Когда это доказано, предыдущее предложение несомненно будет доказуемым. Я утверждаю, что если прямая падает на две прямые и образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то прямые встретятся при их продолжении с той стороны, где углы меньше двух прямых. Допустим, что они не встретятся. Но если они не встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых, то они тем более не встретятся с той стороны, где углы больше двух прямых, так что они не встретятся с обеих сторон. Поэтому они будут параллельными. Но уже доказано, что прямая, падающая на параллельные, образует внутренние односторонние углы, равные двум прямым. [367] Одни и те же углы и равны двум прямым, и меньше двух прямых, что невозможно.»

Доказав это, Птолемей пытается повысить строгость и достичь предыдущего предложения, доказывая, что если прямая падает на две прямые и образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то эти прямые не просто встретятся, как он уже доказал, но они встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых, а не с той, где они больше.

Пусть AB и ΓΔ – параллельные, и секущая EZHΘ образует углы AZH и ΓHZ, меньшие двух прямых. Так что оставшиеся углы больше двух прямых. Уже доказано, что

прямые линии не могут не встречаться. Но если они встречаются, то они делают это либо со стороны A, Г, либо со стороны B, Δ. Допустим, что они встречаются со стороны B, Δ в точке K. Поскольку углы AZH и ГHZ меньше двух прямых, и углы AZH и BZH равны двум прямым, вычтем общую часть AZH, и получится, что ГHZ меньше BZH. Получается, что внешний угол KZH меньше внутреннего противолежащего, что невозможно. Следовательно, они не встречаются с этой стороны. Но они встречаются. Тем самым они встречаются с другой стороны, с которой углы меньше двух прямых.

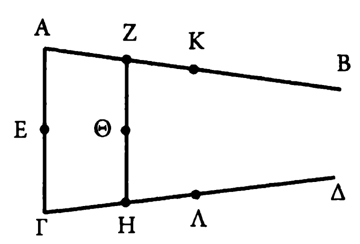


[368] Таково доказательство Птолемея. Но следует посмотреть, нет ли паралогизма в принятых им посылках. Я говорю о той, где он допускает, что когда прямая пересекает невстречающиеся линии и образует четыре внутренних угла, при этом односторонние углы по обе стороны либо равны двум прямым, либо больше двух прямых, либо меньше двух прямых. Это разделение несовершенно. Почему бы тому, кто говорит, что линии, образующие углы, меньшие двух прямых, не встречаются, не допустить, что углы по одну сторону будут больше двух прямых, а по другую меньше двух прямых, в результате чего доказывающего рассуждения уже не будет? И поскольку деление несовершенно, предложенное не доказано.

Более того, надо сказать, что не доказана самая невозможность этого. Ведь секущая прямая не потому не образует углы, по обе стороны большие двух прямых или меньшие, что эта по-

сылка ведёт к невозможному, – но потому, что четыре внутренних угла при сечении равны четырём прямым, так что такие посылки становятся невозможными, даже если провести не параллельные линии, ведь из принятия этих же посылок следуют эти же выводы.

С этим замечанием мы уходим от Птолемея, ведь слабость его доказательства видна из сказанного. Теперь займёмся теми, кто говорит, что невозможно, чтобы встретились прямые, образующие углы, меньшие двух прямых. Возьмём [369] две прямые АВ и ГΔ, соединим их прямой АГ, и пусть при этом внутренние углы будут меньше двух прямых. Они считают, что могут доказать, что АВ и ГΔ не встретятся. Разделим АГ пополам в Е, и на АВ отложим АZ, равный АЕ, а на ГΔ отложим ГН, равный ЕГ. Ясно, что АZ и ГН не могут встретиться ранее Z и Н. Ведь если они встретятся, две стороны треугольника будут [меньше либо] равны АГ, что невозможно. Опять проведём ZН, разделим её пополам в Θ и отложим равные. И опять они не встретятся по той же причине. Будем делать это до бесконечности, проводя прямые между невстретившимися точками, деля их пополам и откладывая на прямых отрезки, равные получившимся половинам. И они говорят, что тем самым доказано, что прямые АВ и ГΔ никогда не встретятся.



Таковы их доводы. Им мы должны ответить, что сказанное ими истинно, но они не достигают того, чего хотели. То, что таким простым путём [370] определить точку встречи не удастся, истинно. Однако то, что прямые вообще никогда не встретятся,

не истинно. Пусть прямые AB и ΓΔ не встречаются, когда углы BAΓ, ΔΓA ограничены точками Z, H. Но отсюда не следует, что они не могут встретиться в K и Λ, даже если ZK, HΛ равны ZΘ, HΘ. Ведь если AK и ΓΛ встречаются в K и Λ, то углы KZΘ, ΛHΘ уже не будут теми же самыми, и ZH будет находиться внутри прямых AK и ΓΛ; и опять же, две прямые ZK, HΛ больше основания на ту часть, которую они получили обратно от прямой ZH [10]. Вот что следует здесь сказать. Утверждая, что прямые, образующие два угла, меньших прямых, не встречаются при продолжении, они заходят не туда, куда хотели.

Пусть чертёж будет таким же. Спрашивается, возможно ли провести прямую от A до H, или невозможно? Если это невозможно, они отрицают не только пятый постулат, но и первый, по которому от всякой точки до всякой точки можно провести прямую. А если возможно, проведём её. Поскольку углы ZAΓ и HΓA меньше двух прямых, ясно, что и углы HAΓ и HΓA тем более меньше двух прямых. [371] Однако AH и ΓH встречаются в H, хотя они образуют углы, меньшие двух прямых. Следовательно, невозможно сказать с определённостью, что прямые, образующие углы, меньшие двух прямых, не встречаются. Напротив, ясно, что некоторые линии, образующие углы, меньшие двух прямых, встречаются; так что довод для всех таких прямых не найден. И поскольку неопределено, какими должны быть углы, меньшие двух прямых, кто-то может сказать, что некоторые такие прямые встречаются, а некоторые не встречаются.

[10] Возражение Прокла логически несостоятельно. Прямые AB и ΓΔ действительно не встретятся ни в одной из построенных таким образом точек; точка встречи будет являться пределом построенных последовательностей точек. Структура этой апории по сути дела совпадает со структурой апории Зенона Элейского «Ахилл и черепаха».

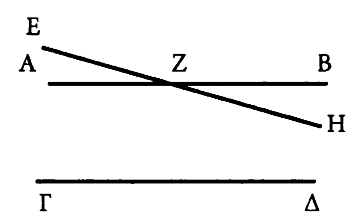
Всякому, кто это разыскивает, мы скажем, что можно принять во внимание аксиому, которой пользуется Аристотель, когда он рассматривает довод о бесконечности космоса [11]. Если из одной точки под углом друг к другу проведены две прямые, то при их неограниченном продолжении расстояние между ними тоже будет расти неограниченно и превзойдёт всякую конечную величину [12]. В итоге он доказывает, что когда прямые уходят из центра на периферию до бесконечности, то и интервал между ними становится бесконечным. Ведь если он остаётся конечным, то расстояние между ними невозможно увеличить, так что прямые не являются бесконечными. Поэтому прямые линии при неограниченном продолжении расходятся на расстояние, большее любой конечной величины. Если положить это в основу, то я утверждаю, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных линий, пересекает и другую тоже.

Пусть AB и ΓΔ параллельны, и EZH пересекает AB. Я утверждаю, что она пересекает также и ΓΔ. Ведь поскольку [372] две прямые выходят из одной точки Z, то когда ZB и ZH продолжаются неограниченно, расстояние между ними станет больше любой конечной величины и тем самым больше расстояния между параллельными [13]. И когда они разойдутся на расстояние, большее расстояния между параллельными линиями, ZH пересечёт ΓΔ. Так что если прямая пересекает одну из двух параллельных, она пересекает и другую.

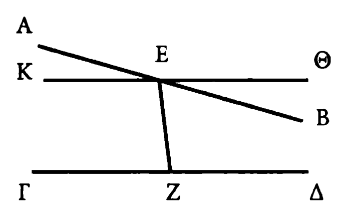
[11] Аристотель, *О небе* 271b8.

[12] Это условие не выполняется в геометрии Лобачевского; так что Прокл заменяет здесь один постулат другим, эквивалентным ему.

[13] Утверждение о наличии между прямыми линиями постоянного расстояния само эквивалентно пятому постулату.



Доказав это, мы как следствие можем доказать и предложенное. Пусть имеются две прямые AB и ΓΔ, и с соединяющей их EZ они образуют углы BEZ, ΔZE, меньшие двух прямых. Я утверждаю, что эти прямые встречаются с той стороны, где углы меньше двух прямых. Поскольку углы BEZ, ΔZE меньше двух прямых, пусть угол ΘEB будет равен избытку двух прямых над ними. Продолжим ΘE в K. Поскольку EZ при пересечении с KΘ и ΓΔ образует внутренние углы ΘEZ, ΔZE, равные двум прямым, прямые KΘ и ΓΔ параллельны. И KΘ пересекает AB; следовательно, она пересекает и ΓΔ, по только что доказанному. Так что AB и ΓΔ встречаются с той стороны, [373] где углы меньше двух прямых, так что предложенное доказано.



XXX. Прямые, параллельные одной и той же прямой, параллельны между собой.

Наш геометр имеет обыкновение в утверждениях о связях (περὶ τῶν σχέσεων) [14] показывать тождество, распространяюще-

[14] Было бы естественнее переводить σχέσις как «отношение», – но это русское слово уже зарезервировано за λόγος'ом – отношением

еся на всё, имеющее одну и ту же связь с одним и тем же. И в аксиомах он утверждает, что равные одному и тому же равны между собой, и в следующих предложениях он показывает, что подобные одному и тому же подобны между собой [15], и что имеющие одно и то же отношение к одному и тому же сами тоже одинаковы [16]. А сейчас он таким же образом доказывает, что, параллельные одной и той же прямой параллельны между собой. Однако это истинно не для всех связей. Ведь двойные к одному и тому же не являются двойными между собой, и половинные к одному не будут половинами друг от друга. Похоже, что это применимо лишь к тому, что соимённо при обращении [17]; и таковы равенство, подобие, тождество, и параллельность по положению. Ведь параллельное параллельно параллельному, как равное равно равному, и как подобное подобно подобному. И можно сказать, что параллельность – это подобие положений.

Здесь он утверждает и доказывает, что [374] прямые, параллельные одной и той же прямой, всегда параллельны между собой. Он берёт прямые, параллельные одной и той же, за крайние, а ту, с которой они имеют сходную связь, за среднюю; и в этом случае утверждение подтверждается нашим общим представлением. Ведь если крайние прямые встречаются между собой, то они обязательно пересекают среднюю и тем самым не параллельны ей. Но это предложение можно доказать и для изменённого положения линий, причём точно так же, как наш геометр делает это для предложенного [18].

величин. Проще на английском: σχέσις = relation, λόγος = ratio.

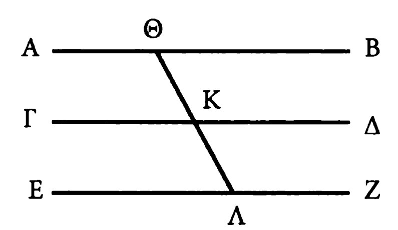
[15] Предложение V.11.

[16] Предложение VI.21.

[17] В современной логике такое отношение называется *симметричным*.

[18] Доказательство Евклида отличается от доказательства Прокла только расположением прямых на чертеже, поэтому мы его не приводим.

Пусть АВ – это прямая, которой параллельны ΓΔ и EZ, и они лежат по одну сторону от неё, а не по разные. Падающая на них прямая ΘΚΛ производит углы ΘΚΔ и ΚΛΖ, равные ΑΘΚ. Будучи накрестлежащими, углы ΘΚΔ и ΚΛΖ равны между собой. Но тем самым ΓΔ и EZ параллельны.



Если кто-нибудь скажет «пусть ΑΘ и ΘΒ параллельны ΓΔ, тогда они параллельны и между собой», мы на это ответим, что ΑΘ и ΘΒ – это не две параллельных, но части одной. Ведь мы мыслим параллельные [375] продолжаемыми неограниченно, а ΑΘ при продолжении совпадёт с ΘΒ, и это одна прямая, а не разные. И все части параллельной прямой сами тоже параллельны той прямой, которой параллельна их прямая, как целое и части. Так ΑΘ параллельна ΚΔ, и ΘΒ параллельна ΓΚ; ведь при неограниченном продолжении они не встречаются. Мы должны были добавить это замечание из-за софистических придирок и незрелых попыток новичков. Ведь многие получают удовольствие от встретившихся паралогизмов, и когда толпа глумится над учёными.

Нет нужды обращать эту теорему и доказывать, что прямая, параллельная одной из двух параллельных, параллельна и другой прямой. Ведь той из двух, которая параллельна, параллельны обе оставшиеся прямые, так что мы получаем ту же теорему.

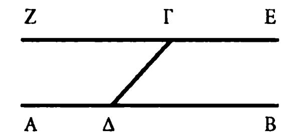
XXXI. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.

Нам нужно научиться в *Началах* не только существенным свойствам параллельных, но также их построению с помощью геометрических методов, и уяснить, как строится прямая, параллельная данной. Ведь зачастую построение [376] проясняет сущность предмета. Для этого автор *Начал* и предлагает эту задачу. Он берёт точку и прямую и проводит через точку параллельную к этой прямой [19].

Нам надо обязательно считать, что точка лежит вне прямой линии. И хотя он говорит «через данную точку», мы не можем поместить эту точку на данной прямой. Ведь проведённая через неё параллельная будет этой самой прямой. Так что, упомянув отдельно точку и прямую, он указывает, что точку надо брать вне прямой. Такое уточнение [20] он сделал для перпендикуляра: «На данную бесконечную прямую из данной точки вне этой прямой опустить перпендикуляр» [21].

Это одна общность обеих задач. Другая же состоит в том, что как из одной точки на одну прямую не могут быть опущены

[19] Евклид выполняет это построение так. Пусть дана прямая АВ и точка Г вне неё. Возьмём на АВ произвольную точку Δ и соединим ГΔ. Проведём ГЕ так, чтобы угол ЕГΔ был равен углу ГΔА, и продолжим ЕГ по прямой до Z. Прямая ZГЕ параллельна АВ по XXVII.



[20] Смысл уточнения здесь всё-таки в другом: построения для проведения перпендикуляра через точку на данной прямой и через точку вне неё у Евклида выполняются различным образом.

[21] Предложение I.12.

два перпендикуляра, так и через одну точку к одной прямой не могут быть проведены две параллельных. Поэтому автор Начал употребляет единственное число и говорит «провести прямую», будь то перпендикуляр, будь то параллельная. Там единственность доказывалась, а здесь она очевидна. Ведь если через одну точку будут проведены две параллельные к одной прямой, параллельные встретятся в этой точке, что невозможно[22].

Надо отметить также разницу оборотов «из данной точки» и «через данную точку». В первом случае точка служит началом проводимой прямой, и поэтому прямая проводится из неё; [377] во втором случае точка лежит на самой прямой, и поэтому прямая проводится через неё. Прямая не рассекает данную точку, проходя через неё, но падает на неё и определяет своё расстояние от другой прямой расстоянием от точки до прямой. Ведь каково расстояние от данной точки до данной прямой, таково и расстояние между этой прямой и параллельной ей.

XXXII. Во всяком треугольнике внешний угол при продолжении одной из сторон равен двум противолежащим внутренним; и внутренние углы треугольника равны двум прямым.

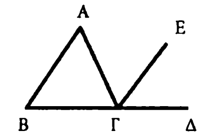
Наш автор восполняет здесь то, чего недоставало в XVI и XVII теоремах. Ведь мы узнаём здесь не только то, что внешний угол треугольника больше любого противолежащего внутреннего угла, но также и насколько он больше. Будучи равным обоим углам, он больше каждого из них как раз на величину другого. И мы узнаём не только то, что любые два угла треугольника меньше двух прямых углов, но также и насколько они

[22] Предложение I.30.

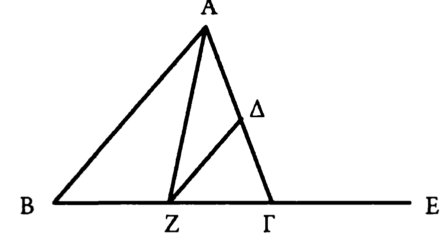
меньше, – а именно, на величину третьего угла. Те две теоремы были менее определёнными, а эта придаёт им обеим научную определённость. Но мы не должны из-за этого говорить, что они были излишними. Ведь они помогли нам осуществить многие доказательства, на которые мы сейчас опираемся. И мы в нашем познании продвигаемся от несовершенного к совершенному, [378] по необходимости совершая броски от неопределённого к определённому и неразрушимому учению.

Автор *Начал* отыскивает доказательство каждой части, проводя внешнюю параллельную [23]. Но можно вести доказательство и иначе, поменяв порядок доказываемого. Он доказывает сперва, что внешний угол равен противолежащим внутренним, а отсюда уже выводит всё остальное; мы же проделаем это в обратном порядке. Пусть имеется треугольник ΑΒΓ, и ΒΓ продолжена в Ε. Возьмём на ΒΓ точку Ζ и проведём ΑΖ; затем через Ζ проведём ΖΔ параллельно ΑΒ. Поскольку ΖΔ параллельна ΑΒ и пересекает ΑΖ и ΒΓ, накрестлежащие углы равны, и соответственные углы равны. Так что весь угол ΑΖΓ равен углам ΖΑΒ, ΑΒΖ. Аналогичным проведением параллельной доказывается, что угол ΑΖΒ равен углам ΖΑΓ, ΑΓΖ. И вот два угла ΑΖΒ, ΑΖΓ равны трём углам треугольника

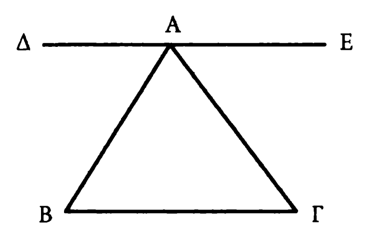
[23] Евклид доказывает это предложение, проводя ΓΕ параллельно ΑΒ внутри угла ΑΓΔ. Углы ΑΓΕ и ΒΑΓ равны как накрестлежащие, углы ΕΓΔ и ΑΒΓ равны как соответственные, и тем самым внешний угол ΑΓΔ, составленный из углов ΑΓΕ, ΕΓΔ, равен внутренним противолежащим углам ΒΑΓ, ΑΒΓ. Далее, три угла треугольника ΑΒΓ равны трём углам ΒΓΑ, ΑΓΕ, ΕΓΔ; а эти углы, в свою очередь, равны двум прямым.



АВГ. И три угла равны двум прямым, а именно AZB, AZГ. Но также и два угла АГZ, АГЕ равны двум прямым. Вычтем общий угол АГZ. Оставшийся внешний угол будет равен двум противолежащим внутренним углам. Так доказывается эта теорема.



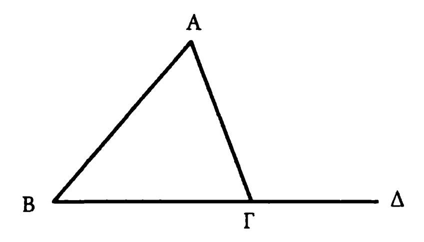
[379] Перипатетик Евдем приписывает открытие этой теоремы пифагорейцам. Он говорит, что равенство внутренних углов всякого треугольника двум прямым они доказывали так. Пусть имеется треугольник АВГ. Через А проведём ΔЕ параллельно ВГ. Поскольку ВГ и ΔЕ параллельны и накрестлежащие углы равны, будут равны углы ΔАВ, АВГ и углы ЕАГ, АГВ. Добавим общий угол ВАГ. И вот углы ΔАВ, ВАГ, ГАЕ равны углам ΔАВ, ВАЕ, то есть углы треугольника АВГ равны двум прямым. Так что три угла треугольника равны двум прямым. Таково доказательство пифагорейцев.



Нам следует теперь рассмотреть обращения этой теоремы. Теорема одна, а обращений у неё два, поскольку она является составной и в заключениях, и в данных. Двоякие данные: треугольник и продолженная сторона. Двоякие заключения: одно

о том, что внешний угол равен внутренним противолежащим, другое о том, что три внутренних угла равны двум прямым. [380] Если мы допустим, что внешний угол равен внутренним противолежащим, мы будем доказывать, что продолженная линия лежит на одной прямой со стороной треугольника. А если мы допустим, что три внутренних угла равны двум прямым, мы будем доказывать, что фигура является треугольником. Таким образом заключения в целом обратны данным в целом.

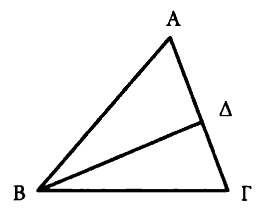
Пусть имеется треугольник ΑΒΓ, и внешний угол ΑΓΔ равен внутренним противолежащим углам. Я утверждаю, что при продолжении ΒΓ в Δ линия ΒΓΔ будет одной прямой. Поскольку угол ΑΓΔ равен внутренним противолежащим углам, добавим угол ΑΓΒ к обеим сторонам равенства. Тем самым углы ΑΓΔ, ΑΓΒ будут равны трём углам треугольника ΑΒΓ. Но три угла треугольника ΑΒΓ равны двум прямым углам. Но если из одной точки на прямой по разные стороны от неё проведены две прямые так, что производимые смежные углы равны двум прямым, то эти две прямые между собой лежат на одной прямой. Тем самым ΒΓ и ΓΔ лежат на одной прямой.



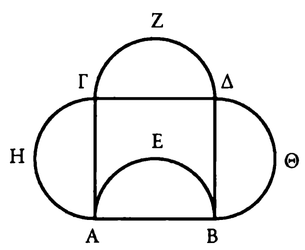
И вновь, пусть фигура ΑΒΓ имеет только три угла Α, Β, Γ, равные двум прямым. Я утверждаю, что это треугольник, и ΑΓ – это одна прямая [24]. Соединим ΒΔ. И поскольку углы в каждом из треугольников ΑΒΔ и ΔΒΓ равны [381] двум пря-

[24] Здесь доказывается, что ΑΓ не может быть ломаной с вершиной Δ.

мым, и в АВГ они тоже равны двум прямым, оставшиеся углы АΔВ, ГΔВ тоже равны двум прямым. И эти углы проведены к прямой ВΔ. Поэтому ΔГ и ΔА лежат на одной прямой. Так что если прямолинейная фигура имеет внутренние углы, равные двум прямым, она всегда будет треугольником.



Но фигура не обязательно будет треугольником, если её внутренние углы равны двум прямым. Ведь ты можешь найти фигуру из круговых обводов, внутренние углы которой равны двум прямым. Пусть имеется квадрат АВГΔ, и на АВ построен полукруг АЕВ внутри, а на остальных сторонах снаружи: H, Z, Θ. Фигура, ограниченная полукругами, имеет только два угла HAE, EBΘ; и они равны двум прямым углам ГАВ, ΔВА, как доказано в постулатах; ведь это единственные углы в этой фигуре[25]. Так что эта фигура не является треугольником, хотя и имеет углы, равные двум прямым. Вот что может быть сказано об обращениях.



[25] Напомним ещё раз, что невыпуклые углы, большие развёрнутого, греки углами вообще не считали.

И вот мы имеем, что во всяком треугольнике внутренние углы равны двум прямым. Теперь нам нужно найти способ, которым для всякого прямолинейного многоугольника будет установлено, какому числу прямых углов равны его углы, – для четырёхугольника, пятиугольника и следующих по порядку многосторонников. [382] Прежде всего, нам следует знать, что всякая прямолинейная фигура разлагается на треугольники. Ведь треугольник – это начало для всего составного; и Платон учит, что всякое правильное плоское основание состоит из треугольников[26]. Всякая прямолинейная фигура разлагается на треугольники, которых по числу на два меньше, чем сторон: четырёхсторонник – на два, пятисторонник – на три, шестисторонник – на четыре. Ведь два треугольника, составленные вместе, образуют четырёхстороннюю прямолинейную фигуру, и эта разность между числом составленных треугольников и числом сторон первой составленной из них фигуры остаётся той же и для всех последующих случаев. Всякая многосторонняя фигура содержит на две стороны больше, нежели треугольников, на которые она разлагается. Но уже доказано, что углы всякого треугольника равны двум прямым. Так что удвоенное число составляющих треугольников даёт количество прямых углов, которому равны углы каждого многоугольника. И во всяком четырёхсторોннике его углы равны четырём прямым, поскольку он составлен из двух треугольников; во всяком пятистороннике – шести, и подобным образом далее.

Это одно следствие, приложимое ко всем многоугольным прямолинейным фигурам. А другое состоит в том, что когда [383] во всякой прямолинейной фигуре все её стороны единожды продолжены наружу, построенные внешние углы будут рав-

[26] Платон, *Тимей* 53c.

ны четырём прямым. Ведь углы по обе стороны [27] должны быть равны прямым углам, удвоенным по сравнению с количеством сторон, поскольку углы на каждой продолженной стороне равны двум прямым. И если мы вычтем прямые углы, которым равны внутренние углы, то оставшиеся внешние углы будут равны четырём прямым. К примеру, пусть фигура будет треугольной, и каждая её сторона единожды продолжена наружу; тогда все внешние и все внутренние углы равны шести прямым, и из них внутренние равны двум, так что оставшиеся внешние углы равны четырём. И в четырёхстороннике все углы равны восьми, по удвоенному числу сторон; а из них внутренние равны четырём, так что и внешние равны другим четырём. И в пятистороннике все вместе равны десяти, внутренние – шести, так что оставшиеся внешние – четырём. И таким же способом до бесконечности.

Далее мы перечислим следующие следствия из этой теоремы: во всяком равностороннем треугольнике каждый из его углов равен двум третям прямого угла; и если в равнобедренном треугольнике угол при его вершине является прямым, то оставшиеся углы равны половине прямого, как в половине квадрата; и в разностороннем полутреугольнике, получающемся из равностороннего [384] треугольника опусканием перпендикуляра из любого его угла на противоположную сторону, один угол будет прямым, другой – двумя третями прямого (это угол равностороннего треугольника), оставшийся – третью прямого. Я упоминаю об этих вещах не просто так, но потому что они подготавливают нас к изучению *Тимея* [28].

Наконец, мы должны сказать, что свойство иметь углы, равные двум прямым, является сущностным для треугольника. И Аристотель в своём сочинении о доказательстве рассматривает

[27] То есть все внутренние и все внешние, взятые вместе.
[28] Платон, *Тимей* 53d–54b.

это свойство в качестве обычного примера[29]. Как первое и сущностное свойство всякой фигуры состоит в том, чтобы иметь границу, так и во всяком прямолинейном треугольнике, но не во всякой фигуре, оно состоит в том, чтобы иметь углы, равные двум прямым. Истина этой теоремы совпадает с нашими общими понятиями. Ведь если мы представим прямую с восстановленными на её концах перпендикулярами, и затем сведём их вместе, образуя треугольник, мы увидим, что при схождении они уменьшают величину тех прямых углов, которые они составляли с прямой линией, и при этом они добавляют отнятое к углу при вершине, по необходимости образуя три угла, равные двум прямым.

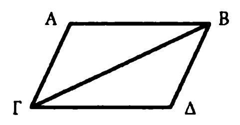
[385] XXXIII. Прямые, соединяющие равные и параллельные прямые с одинаковых сторон, между собой также равны и параллельны.

Мы назвали эту теорему пограничной между изучением параллельных прямых и параллелограммов [30]. Ведь она учит нас и свойствам равных и параллельных прямых, и построению параллелограммов. Построение параллелограмма начинается с равных и параллельных прямых, и при этом оказывается, что соединяющие их прямые также равны и параллельны [31]. А в

[29] Аристотель, *Вторая аналитика* 73b31.

[30] 355.9.

[31] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть прямые АВ и ГΔ равны и параллельны. Докажем, что АГ и ВΔ тоже равны и параллельны. Проведём диагональ ГВ. Углы АВГ и ВГΔ равны как накрестлежащие. Треугольники АГВ и ВГΔ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому АГ и ВΔ равны. Далее, углы АГВ и ГВΔ равны. Поэтому АГ и ВΔ параллельны.

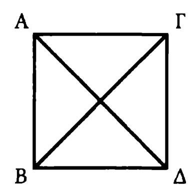


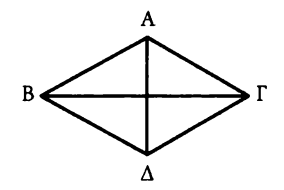
следующей теореме исследуются существенные свойства таких площадей в предположении, что параллелограмм уже построен.

Всё это очевидно; и всё же мы должны внести в рассмотрение надлежащую строгость. Во-первых, недостаточно того, чтобы соединяемые прямые были равны. Ведь прямые, соединяющие равные прямые, не всегда равны, но только если те параллельны. Если взять точку на одной из равных сторон равнобедренного треугольника, и провести через неё прямую параллельно основанию, эта параллельная к основанию прямая и само основание будут соединять равные линии; но сами они не будут равны. Ведь прямые, встречающиеся в вершине треугольника, не были параллельны.

Во-вторых, когда прямые параллельны, но не равны, [386] наш автор не берётся построить соединяющие их параллельные. Это тоже очевидно на примере равнобедренного треугольника. Проведенная прямая и основание здесь параллельны, однако соединительные прямые не параллельны. Ведь это части сторон равнобедренного треугольника. Для равенства соединяющих требуется параллельность соединяемых, и для параллельности – равенство. По этой причине автор *Начал* называет оба свойства соединяемых, потому что он доказывает их оба и для соединяющих прямых: равенство между собой и параллельность.

В третьих, надо сказать, что когда даны равные и параллельные прямые, соединяющие их прямые не всегда будут равными и параллельными. Ведь если мы соединим их концы не по одну сторону, соединяющие линии не смогут быть параллельными, потому что они будут пересекать друг друга; и иногда они будут равными, иногда нет. Если взять квадратную или прямоугольную площадь ΑΒΓΔ и провести в ней ΑΔ и ΒΓ, эти диагонали будут равны, но не параллельны, хотя они соединяют равные и параллельные прямые, каковы противоположные стороны названной площади.





А если взять ромб или ромбоид, диагонали не только не будут параллельными, но не будут и равными. [387] Ведь хотя АВ равно ГΔ, и АГ – общая сторона, но углы ВАГ и АГΔ не равны, так что не равны и основания. Поэтому автор *Начал* требует, чтобы прямые, соединяющие равные и параллельные прямые, соединяли их с одинаковых сторон, так что если взяты равные и параллельные прямые АГ и ВΔ, соединительными прямыми были бы не АΔ и ВГ, но АВ и ГΔ. Для этих мы можем доказать их равенство и параллельность; но для тех мы не можем доказать параллельность, хотя мы можем доказать их равенство в случае квадратов и прямоугольников; а для ромбов и ромбоидов мы и его доказать не можем, зато можем доказать неравенство, ведь они неравны из-за неравенства внутренних углов при одной стороне.

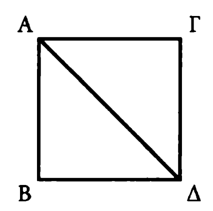
XXXIV. В площадях параллелограммов противоположные стороны и углы равны между собой; и диагонали делят их пополам.

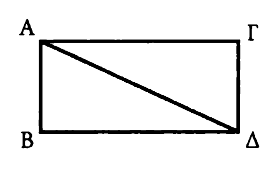
Взяв параллелограмм как уже построенный по предыдущей теореме, наш автор теперь рассматривает первые свойства и характеристики [388] его особого устройства. Они таковы: противоположные стороны равны, противоположные углы равны, диагональ делит площадь пополам. Ведь слова «диагонали делят их пополам» относятся к целой рассечённой площади, а не к углам, через которые проведена диагональ. Итак, параллелограмму присущи эти три свойства: равенство противопо-

ложных сторон, равенство противоположных углов, деление площади диагональю пополам. Ты видишь, что он отыскивает все его особенности: и для сторон, и для углов, и для площади.

Имеются четыре вида параллелограммов, как определено в предположениях: квадрат, прямоугольник, ромб, ромбоид. И следует знать, что среди этих четырёх видов мы выделяем прямоугольные, и тогда мы найдем не только то, что диагональ делят их пополам, но также и то, что диагонали равны между собой, когда углы прямые, и не равны, если углы не прямые, как найдено в предыдущей теореме; а если мы выделим равносторонние, то опять-таки найдём, что у них делится диагональю пополам не только площадь, но и углы, через которые эта диагональ проведена. Ведь в квадрате и в ромбе диагональ делит пополам углы, а не только площади, а в прямоугольнике и ромбоиде – только площади.

[389] Пусть ΑΒΓΔ – это квадрат или ромб, и ΑΔ – диаметр. Поскольку ΑΒ, ΒΔ равны ΑΓ, ΓΔ (ведь стороны равны), и углы ΑΒΔ и ΑΓΔ равны (ведь они противоположны), а основание общее, все соответствующие части равны, так что углы ΒΑΓ и ΓΔΒ рассечены пополам. И опять, пусть это будет прямоугольник или ромбоид. Когда угол ΓΑΒ рассечён пополам, поскольку угол ΓΑΔ равен углу ΑΔΒ, то и угол ΒΑΔ был бы равен углу ΔΑΒ, и тем самым ΑΒ было бы равно ΒΔ. Но они не равны.





Соберём это вместе. В квадрате диагонали равны из-за прямизны углов, углы делятся пополам из-за равенства сторон, и площадь делится диагональю пополам по общему свойству

параллелограммов. В прямоугольнике диагонали равны, углы не делятся диагоналями пополам, площади же делятся, как у всех параллелограммов. В ромбе диагонали [390] не равны, но они делят пополам не только площади, поскольку они – параллелограммы, но и углы, потому что они – равносторонние. А в оставшихся ромбоидах и диаметры не равны, потому что они не прямоугольны, и углы делятся неравно, потому что они не равносторонни, и только площади при делении получаются равными, потому что они – параллелограммы. Мы сказали это, чтобы показать разницу, которая имеется между четырьмя видами параллелограммов.

Следующее важное техническое замечание, связанное с этой теоремой, состоит в том, что одни теоремы бывают общими, а другие нет. Что мы под этим подразумеваем, станет понятным, если разделить искомое на общее и остальное. Впрочем, есть и такое мнение, что всякая теорема является общей: ведь всё, что доказывает автор *Начал*, является существенным. К примеру, эта теорема говорит не только о том, что наличие равных противоположных сторон и углов является общим свойством для всех параллелограммов, но также и то, что каждый из них делится пополам диагональю. Но мы и не утверждаем, что те свойства являются общими, а это – нет. В одном смысле об общем говорится как о том, что истинно для всех, [391] в другом же – как обо всём, что охватывается этим признаком. «Всякий равнобедренный треугольник имеет три угла, равные двум прямым», – это общее утверждение, потому что оно истинно для всех равнобедренных треугольников. Но «всякий треугольник имеет три угла, равные двум прямым», – это тоже общее утверждение, поскольку оно истинно вообще для всего, обладающего этим свойством. Поэтому доказательство того, что углы треугольников равны двум прямым, является первичным. Именно в этом смысле мы говорим о том, что одни теоремы являются общими, а другие нет, и также говорим о

какой-либо теореме, что часть её выводов является общей, а другая нет.

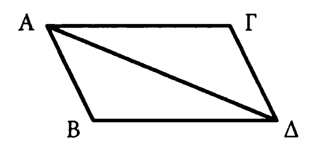
То, что параллелограммы имеют равные противоположные стороны и углы, является общим, потому что это свойственно только параллелограммам; а то, что они делятся диаметром пополам, общим не является, потому что это утверждение не охватывает всего, чему присуще это свойство. Ведь оно присуще также кругам и эллипсам. Так от сходных первоначальных замечаний мы переходим к целому. И древние, заметив, что диаметр делит пополам эллипс, круг и параллелограмм, стали рассматривать общность этих случаев.

И ошибочно, говорит Аристотель, считать не общее общим из-за того, что общий первичный признак не имеет имени[32]. К примеру, невозможно сказать, что общего имеется у чисел, величин, движений и голосов, хотя всем им присуще обращение (τὸ ἐναλλάξ). И трудно установить общее у эллипса, круга и параллелограмма. Ведь этот прямолинеен, тот [392] ограничен круговой линией, а тот – смешанной. И потому, доказывая что диаметр параллелограмма делит его пополам, мы считаем, что доказываем общее, поскольку мы не обозрели то общее, для которого это истинно. Так что это утверждение о параллелограммах не является общим по указанной причине; а то, что всякий параллелограмм имеет равные противоположные стороны и углы, является общим. Ведь если мы представим фигуру, у которой равны противоположные стороны и углы, можно доказать, что это параллелограмм.

Пусть АВГΔ будет такой фигурой с диагональю АΔ. Поскольку АВ, ВΔ равны АГ, ГΔ, и охватывающие их углы равны, а основание общее, все соответственные части будут равны. Но

[32] Аристотель, *Вторая аналитика*,74a5–b5.

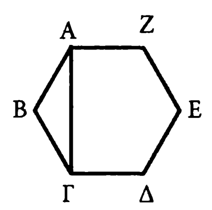
если угол ВАΔ равен углу АΔГ, и угол АΔВ равен углу ГАΔ, тем самым АВ и ГΔ, а также АГ и ВΔ параллельны. Поэтому АВГΔ – параллелограмм. И об этом достаточно.



Кажется даже, что само имя параллелограмма взято автором *Начал* в связи с этой теоремой. Ведь когда он показал, что прямые, соединяющие равные и параллельные прямые с одинаковых сторон, между собой также равны и параллельны, он очевидно показал, что параллельны обе пары противоположных сторон, [393] соединяемые и соединяющие. И он естественно называл фигуру, охваченную параллельными прямыми, параллелограммом, так же как фигуру, охваченную прямыми линиями, он назвал прямолинейной.

Ясно также, что автор *Начал* относит параллелограмм к четырёхсторонним фигурам. Следует знать, что не всякая прямолинейная фигура с чётным числом сторон, равносторонняя и равноугольная, называется параллелограммом. Ведь у такой фигуры противоположные стороны параллельны и противоположные углы равны: и таковы шестиугольник, восьмиугольник, десятиугольник.

Если ты представишь шестиугольник АВГΔΕΖ и соединишь АГ, ты докажешь, что АΖ и ГΔ параллельны. Ведь поскольку угол В (и все прочие углы шестиугольника, который является равноугольным) составляет одну и одну треть от прямого угла, и поскольку АВ равна ВГ (ведь шестиугольник равносторонний), тем самым углы ВАГ и ВГА составляют по одной трети от прямого угла, а потому углы ΖАГ и АГΔ прямые, так что АΖ параллельна ГΔ.



Сходным образом мы можем доказать, что и другие противоположные стороны параллельны, и то же самое для восьмиугольника и остальных. Так что если параллелограмм – это фигура с параллельными противоположными сторонами, то не все параллелограммы [394] будут четырёхсторонними. Но ясно, что для автора *Начал* все параллелограммы – четырёхсторонние. Это проявляется ниже в теореме о том, что параллелограмм на одном основании с треугольником и между одними и теми же параллельными вдвое больше треугольника, что справедливо только для четырёхсторонних фигур.

XXXV. Параллелограммы на одном основании и между одними и теми же параллельными равны между собой.

Мы уже сказали, что одни теоремы являются общими, а другие частными, и разъяснили смысл этого разделения; и ещё – что одни теоремы являются простыми, а другие сложными, и каков каждый из этих видов. А теперь мы введём ещё одно разделение и скажем, что одни теоремы являются местными (τοπικά), а другие нет. Местными я называю теоремы, в которых возникают некоторые свойства (σύμπτωμα), целиком связанные с определённым местом, а местом – положение линии или поверхности, производящей такие свойства. Одни местные теоремы относятся к линиям, другие – к поверхностям. И поскольку одни линии являются плоскими, а другие – телесными (плоские линии лежат в плоскости и имеют простое

понятие, и такова прямая, телесные же получаются сечением телесной фигуры, и таковы цилиндрическая спираль [33] и конические линии), я должен сказать, что из местных теорем к линиям в одних рассматриваются плоские места, в других – телесные. Предложенная теорема является местной, и в ней рассматривается плоское место к линиям. Ведь всё пространство между параллельными линиями является местом для параллелограммов, построенных на одном основании, о которых автор *Начал* доказывает, что они равны между собой. Пример так называемого телесного места даёт следующая теорема: «параллелограммы, вписанные между асимптотами и гиперболой, равны между собой» [34]. Ведь гипербола очевидно [395] относится к телесным линиям, поскольку она является сечением конуса.

Хрисипп, как говорит нам Гемин, сравнивал такие теоремы с идеями. Ведь как идеи объемлют порождение неограниченного числа вещей в определённых границах, так и эти теоремы охватывают неограниченное число случаев, связанных с определённым местом. Равенство фигур оказывается результатом этого ограничения. Ведь высота параллельных [35], между которыми мыслится неограниченное число параллелограммов на одном основании, показывает, что все эти параллелограммы равны между собой.

Это первая местная теорема из представленных нам автором *Начал*. Стараясь представить в *Началах* всё разнообразие теорем, он очевидно не пропускает и эту их разновидность. Но поскольку эта книга посвящена прямолинейным фигурам, в ней идёт речь о плоских местах к прямым, тогда как в третьей

[33] Цилиндрическая спираль плоским сечением телесной фигуры получена быть не может.

[34] Аполлоний, *Коника* II.12.

[35] Т. е. расстояние между параллельными.

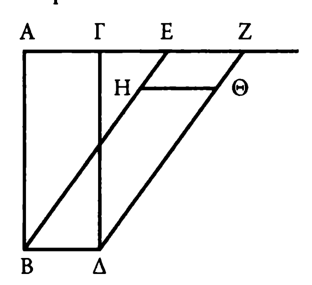
книге, [396] посвящённой кругам и их свойствам, он обучает нас плоским местам к окружностям. К примеру, «углы, опирающиеся на одну дугу, равны между собой» и «углы в полукруге – прямые» [36]. Ведь в окружность можно вписать бесконечно много углов на одном основании, и доказывается, что все они равны между собой. И аналогично строятся треугольники и параллелограммы на одном основании. Таков вид рассматриваемых здесь теорем, которым древние математики дали имя местных.

Людям, неопытным в этой теории, может показаться удивительным, что параллелограммы на одном основании оказываются равными между собой. Ведь когда длины [37] построенных на одном основании площадей растягиваются до бесконечности – а мы можем увеличивать их в той же мере, в какой продолжаются параллельные прямые – естественно будет спросить: как при этом остаются равными площади? Но если ширина такова – ведь основание у них одно – то когда длина становится больше, почему не может стать больше и площадь? В математике эта теорема и следующая за ней теорема о треугольниках названы парадоксальными теоремами. Математики [397] проработали так называемые парадоксальные места, подобно тому, как это сделали стоики со своими догмами, и эта теорема – одна их них. Впрочем, большинство людей сразу понимают, что увеличение длины не нарушает равенства площадей, если основание остаётся тем же самым. Сходным образом может показаться, что равенство и неравенство углов оказывается важнейшим для увеличения и уменьшения площадей. Ведь чем более неравными мы делаем углы, тем сильнее уменьшается площадь, если длина и ширина остаются преж-

[36] Предложения III.21 и III.31.
[37] Длины = боковые стороны, ширины = основания.

ними. Так что если мы желаем сохранить равенство, нам надо растягивать длину.

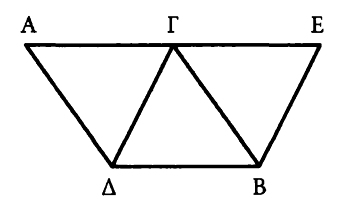
Возьмём произвольный параллелограмм АВГΔ и продолжим АГ до бесконечности. Допустим, что он оказался прямоугольным, и на основании ВΔ построим ещё один параллелограмм ВΕΖΔ. Ясно, что длина при этом выросла. Ведь ВЕ больше АВ, поскольку угол А – прямой. И это произошло по необходимости. Ведь углы параллелограмма ВΕΖΔ не равны между собой, но один острый, а другой тупой. И это случилось потому, что сторона ВЕ как бы сложилась с ВΔ и стянула площадь. Пусть будут равными АВ и ВН, [398] и НΘ проведена через Н параллельно ВΔ. Тогда длина ВΔНΘ будет равна длине АВГΔ, и ширина будет той же самой, а его площадь будет меньше площади ВΕΖΔ. Ведь неравенство углов уменьшает площадь, так что желаемое равенство площадей должно получаться за счёт увеличения длины. А границей для увеличения длины служит место параллельных.



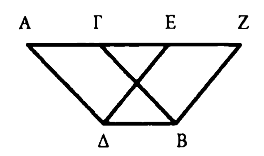
Если параллелограммы прямоугольны, то [при равных периметрах] доказывается, что квадрат больше вытянутого прямоугольника; а если они равносторонние, то доказывается, что прямоугольный параллелограмм больше непрямоугольного. Ведь прямизна углов и равенство сторон существенны для увеличения площадей. Изо всех изопериметрических [четырёхсторонников] квадрат обнаруживает наибольшую площадь, а ромбоид – наименьшую. Но всё это раскрывается в другом

месте, поскольку относится к предположениям второй книги. А для представленной здесь теоремы следует уяснить, что под равенством параллелограммов подразумевается равенство площадей, а не сторон, поскольку дело касается именно площадей, и что в доказательстве этой теоремы наш автор в первый раз упоминает трапецию. Ясно, что это согласуется с предположениями, в которых он объясняет, что она относится к роду четырёхсторонников [399] и не является параллелограммом. Ведь четырёхсторонник, не имеющий равных противоположных сторон и углов, выпадает из класса параллелограммов.

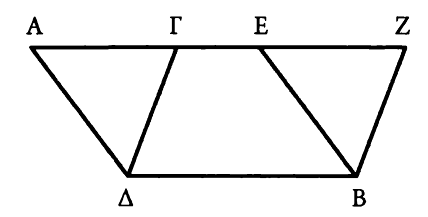
Автор *Начал* доказывает эту теорему, выбирая самый трудный случай [38]. А если бы параллелограммы ΑΒΓΔ и ΒΓΔΕ находились на одном основании ΔΒ, так что ΔΓ была бы диагональю в параллелограмме ΑΒ, мы тут же доказали бы их равенство. Ведь треугольник ΒΓΔ был бы половиной каждого из них, и в параллелограмме ΑΒ диагональю была бы ΔΓ, а в параллелограмме ΔΕ диагональю была бы ΒΓ. Но диагонали делят параллелограммы пополам, и потому параллелограмм ΑΒ равен параллелограмму ΔΕ.



[38] А именно, когда параллелограммы пересекаются боковыми сторонами. От трапеции ΑΔΒΖ отнимаются равные треугольники ΑΔΕ и ΓΒΖ, после чего остаются равные параллелограммы ΔΕΒΖ и ΔΑΒΓ.



Теперь предположим, что ΔΓ рассекает сторону параллелограмма AB и что параллелограммы расположены как ABΔE и BΓΔZ; докажем, что они равны. Ведь AE равна ΓZ, поскольку обе они равны противоположной стороне ΔB; [400] вычтем из них общую часть ΓE. Тогда AΓ равна EZ. Но AΔ равна EB, поскольку угол ΓAΔ равен углу ZEB – ведь параллельны AΔ и EB. Так что основание ΓΔ равно основанию ZB, и весь треугольник AΔΓ равен треугольнику EBZ. Добавим к ним обоим трапецию ΓB. И в целом параллелограмм AB равен параллелограмму ΔZ.



И имеются только эти три случая. Ведь ΔΓ или рассекает EB, как это принимает автор *Начал*, или падает в E, как на предыдущем чертеже, или рассекает AB, как мы только что рассмотрели. И истинность теоремы доказана для всех трёх случаев.

А ещё следует отметить, что из двух разновидностей трапеции, у одной из которых нет противоположных параллельных сторон, а у другой одна пара параллельна, наш геометр рассматривает только второй вид, приведённый на чертеже [39]. Ведь ΓE параллельна ΔB.

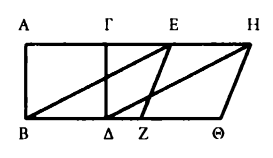
[39] Евклид называет трапецией всякий четырёхугольник, не являющийся параллелограммом.

XXXVI. Параллелограммы на равных основаниях и между одними и теми же параллельными равны между собой.

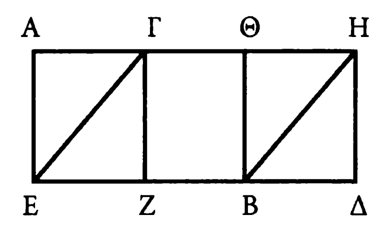
Раньше основания брались одними и теми же, теперь же они равны, но различны между собой. Общая же посылка здесь та, что параллелограммы находятся между одними и теми же параллельными. И они не должны лежать ни внутри, ни снаружи [401] параллельных прямых. Говорят, что параллелограммы находятся между одними и теми же параллельными, когда их основания и противоположные им стороны совпадают с этими параллельными. Автор начал доказывает теорему с том предположении, что основания полностью разнесены друг от друга[40]. Но ничто не мешает рассмотреть и тот случай, когда они имеют общую часть.

Пусть AB и ΓΔ – параллелограммы на равных основаниях EB и ZΔ. Я утверждаю, что они равны. Проведём EΓ и BH. Поскольку EZ равна BΔ (ведь EB равна ZΔ), ΓZ равна HΔ, и угол EZΓ равен углу BΔH (ведь ZΓ и ΔH параллельны), тем самым EΓ и BH равны. И они также параллельны, так что ΓB – параллелограмм. Но он имеет общие основания с другими

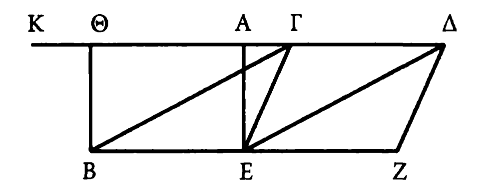
[40] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть ABΓΔ и EZHΘ – параллелограммы на равных основаниях и между одними параллельными. Проведём прямые BE и ΔH. Поскольку они соединяют равные и параллельные прямые BΔ и EH, тем самым BEΔH – параллелограмм. Далее, параллелограмм BEΔH порознь равен параллелограммам ABΓΔ и EZHΘ по предыдущей теореме. Тем самым параллелограммы ABΓΔ и EZHΘ равны между собой.



параллелограммами AB и ΓΔ между теми же параллельными. Поэтому AB и ΓΔ равны.



Допустим теперь, что основания параллелограммов не имеют общей части и не отделены друг от друга; остаётся последний случай, когда они встречаются в точке. Пусть это будут AB и ΔE. Мы говорим, что BE, EZ, ΓΔ равны, так что равны также ΓB и ΔE. [402] Ведь они соединяют равные и параллельные, так что и сами равны и параллельны. Тем самым BΔ есть параллелограмм на общих основаниях с другими параллелограммами AB и EΔ между теми же параллельными. Поэтому AB и ΔE равны.



Мы сделали здесь первые наброски построений к данной теореме, сказав, что основания либо имеют общую часть, либо касаются, либо отстоят друг от друга. Но также возможно, если они касаются, как BE и EZ, допустить, что параллелограммы ΔE и AB либо целиком находятся один снаружи другого, либо что они прилажены друг к другу по AE, так что ΓE совпадает с AE, либо ΓE рассекает AΘ, либо ΓE является диагональю в ΘE (и тогда ΔZ совпадает с AZ), либо AΘ продолжается до K, так

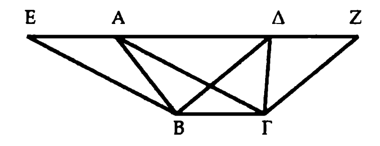
что ΓΕ падает снаружи Θ, так что ΔΖ или рассекает ΑΘ, или совпадает *** [41]

[403] [XXXVII. Треугольники на одном основании и между одними и теми же параллельными равны между собой.] [42]

*** они показали. Ведь доказано, что у равных [43] неравные площади, а у неравных равные. Такую ошибку совершают географы, когда они оценивают величину города по периметру стен. И при разделе земли некоторые вводят в заблуждение своих сограждан: получив надел с бóльшим периметром, они меняют его затем на участок с меньшим периметром, приобретая благую славу. Возьмём два равнобедренных треугольника, и пусть у одного из них боковые стороны будут по пять единиц, будь то локтей или пальцев, а основание в шесть, а у другого боковые стороны по пять, а основание в восемь. Выбирая между ними, неопытный человек обратит внимание на то, что периметр первого составляет шестнадцать единиц, а второго восемнадцать. [404] Но геометр заметит, что они равны по пло-

[41] Лакуна в тексте.

[42] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть ΑΒΓ и ΔΒΓ – треугольники на одном основании и между одними параллельными. Достроим их до параллелограммов ΑΓΕΒ и ΔΒΖΓ. Эти параллелограммы равны между собой, поскольку они находятся на одном основании и между одними параллельными. Поэтому и треугольники ΑΒΓ и ΔΒΓ равны между собой как половины равных.



[43] По периметру, как это видно из дальнейшего текста.

щади, хотя и не равны по периметру. Ведь она в обоих случаях составляет двенадцать единиц. Ведь если опустить высоту из вершины, основание разделится пополам, и половина основания в первом треугольнике будет в три единицы, а в другом в четыре. А сама высота в первом треугольнике будет в четыре единицы, а во втором в три. Ведь квадрат пяти должен быть равен квадрату высоты и квадрату половины основания. Так что когда половина основания равна трём, высота равна четырём; а когда половина основания равна четырём, высота равна трём. Умножив высоту на половину основания, ты получишь площадь треугольника. И она в обоих случаях одинакова, поскольку трижды четыре равно четырежды трём.

Так что нельзя судить о равенстве площадей по равенству периметров. И мы не должны удивляться тому, что у треугольников на одном основании их остальные стороны могут неограниченно вытягиваться между теми же параллельными, хотя равенство площадей будет оставаться при этом неизменным. При этом говорят, что треугольники находятся между одними и теми же параллельными, когда их основания лежат на одной параллельной, а вершины на другой, то есть когда их вершины связаны с одной прямой, а основания лежат на другой параллельной прямой.

[405] XXXVIII. Треугольники на равных основаниях между одними и теми же параллельными равны между собой.

Это также местная теорема, аналогичная теореме о параллелограммах, и здесь треугольники располагаются на равных основаниях. Мне представляется, что в этих четырёх теоремах, две из которых относятся к параллелограммам, и две к треугольникам, и в двух основания суть одни и те же, а в двух они предполагаются равными, наш автор доказывает первую теорему шестой книги для самого простого случая, а большинство

этого не замечает. Ведь когда он доказывает теорему о том, что треугольники или параллелограммы под одной высотой имеют друг к другу то же отношение, что и их основания, он обобщает эти доказательства на случай пропорций. Ведь быть под одной высотой – это то же самое, что находиться между одними и теми же параллельными, поскольку все фигуры между одними и теми же параллельными имеют одну и ту же высоту, и обратно. Ведь высота – это перпендикуляр, опущенный из одной параллельной на другую. В этом предложении он доказывает с помощью пропорции, что треугольники и параллелограммы под одной высотой, то есть лежащие между одними параллельными, относятся друг к другу как их основания. И когда основания равны, равны и площади; а для двукратных – двукратные; и какое бы отношение не имели между собой основания, такое же отношение будут иметь и площади. [406] Но здесь же – поскольку он ещё не объяснил, что такое пропорция – он имеет дело только с равенством, выводя равенство из тождества оснований. Так что эти четыре теоремы следуют одна за другой, и не только потому, что они имеют одно доказательство, охватывающее все четыре случая, но ещё и потому, что в них присутствует тождество отношений, даже когда основания не равны. И об этом достаточно[44].

У этой теоремы также имеется много случаев. Можно допустить, как и для параллелограммов, что основания треугольников имеют общую часть, или не имеют общей части, но

[44] Прокл здесь не вполне прав. Во-первых, Евклид в доказательстве теоремы VI.1 уже пользуется результатами, полученными в этих четырёх теоремах. Во-вторых, для теоремы VI.1 существенно то, что в ней рассматривается и случай несоизмеримых оснований, а для него недостаточно воспользоваться простейшим представлением об отношении, выражающемся парой целых чисел, когда достаточно сказать «здесь в N раз больше/меньше, значит и здесь в N раз больше/меньше».

встречаются в одной точке, или отделены друг от друга линией[45]. Ясно впрочем, что это даёт мало возможностей: ведь как бы не располагались основания и вершины, мы будем действовать всегда одинаково, проводя параллельные к сторонам и достраивая треугольники до параллелограммов, и уже через них устанавливая равенство треугольников.

[407] XXXIX. Равные треугольники на одном и том же основании и по одну и ту же сторону лежат также между одними и теми же параллельными.

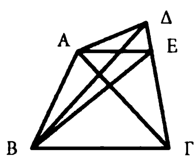
Чтобы доказать равенство, мы произвели по числу четыре теоремы, две для параллелограммов и две для треугольников, предполагая их лежащими на одном или на равных основаниях. Теперь же в обращении мы пропускаем параллелограммы и рассматриваем только теоремы о треугольниках. Причина здесь в том, что и способ доказательства для них один и тот же, и он состоит в приведении к невозможному, и построения сходные; так что нам достаточно рассмотреть более простой случай, под которым я подразумеваю треугольники, представив метод и оставив вывод остальных случаев для вдумчивых читателей, поскольку в них легко применить тот же самый метод. А именно, мы будем брать равные параллелограммы на равных основаниях и предполагать, что они не лежат между одними и теми же параллельными. Но если они не лежат, то один из них будет выступать за другую параллельную или лежать внутри. Тогда мы возьмём другой параллелограмм, который лежит между параллельными, и докажем, как и в случае треугольников, что часть равна целому. Но это невозможно.

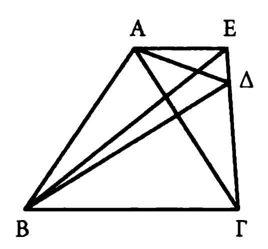
[45] Для каждого такого случая возможны ещё по три варианта взаимного расположения вершин, противолежащих основанию.

Ясно, что автор *Начал* прав, когда он добавляет оборот «и по одну сторону». Ведь могут [408] быть равные треугольники на одном основании, но один по одну сторону, а другой по другую от него. Но такие треугольники не лежат между параллельными, так как они не находятся под одной высотой. Поэтому он добавляет этот оборот.

В предположении, которое ведёт к невозможному, возможно двоякое расположение параллельных. Он проводит её внутри, мы же проведём её снаружи и докажем то же самое. Пусть АВГ и ΔВГ – [равные] треугольники на одном основании и по одну сторону от него. Я утверждаю, что они находятся между одними параллельными, так что прямая, соединяющая их вершины, параллельна основанию. Соединим АΔ. Если она не параллельна, пусть такой параллельной будет АЕ вне неё. Продолжим ГΔЕ и соединим ЕВ. Треугольник АВГ равен треугольнику ЕВГ, но также АВГ равен ΔВГ. Тем самым ΔВГ равен ЕВГ, и часть равна целому. Но это невозможно. Так что параллельная не идёт снаружи АΔ. Но автор *Начал* доказал, что она не идёт внутри. Поэтому АΔ сама параллельна ВГ. Так что треугольники на одном и том же основании и по одну и ту же сторону находятся также между одними и теми же параллельными. Такова другая половина доказательства того факта, что они находятся между одними параллельными, и доказательство ведётся сведением [409] к невозможному [46].

[46] Чертёж к доказательству Евклида выглядит иначе, но суть рассуждений от этого не меняется. Здесь треугольник ΔВГ равен треугольнику АВГ по условию, треугольник ЕВГ равен треугольнику АВГ по построению, поскольку АЕ параллельна ВГ. Но тем самым часть ЕВГ равна целому ΔВГ, что невозможно.





Важно отметить, что имеются три вида обратных теорем: целому обратно целое, как в восемнадцатой и девятнадцатой, либо целому обратна часть, как в шестой и пятой, либо целое обратно части, как в восьмой и четвёртой. Ведь там ни заключение с посылкой, ни посылка с заключением не совпадали в целом, но лишь частично. Рассматриваемые теоремы о треугольниках как раз к таким и относятся. Ведь там искомым было равенство треугольников. А здесь оно берётся за данное, но только как часть посылки. И к нему добавляется условие «лежат по одну сторону», а равенство присутствует как там, так и здесь. И в посылку здесь добавляется нечто, чего не было там ни в искомом, ни в данном: а именно то, что треугольники лежат по одну сторону.

XL. Равные треугольники на равных основаниях и по одну и ту же сторону находятся также между одними и теми же параллельными.

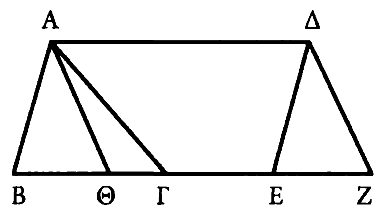
Способ обращения здесь тот де самый, доказательство нисколько не отличается от предыдущего; и то, что автор *Начал* в своём доказательстве, которое ведётся сведением к невозможному, оставил в стороне, доказывается так же. Так что мы не будем к этому возвращаться.

Поскольку в этих утверждениях содержатся три [410] посылки – равенство оснований, нахождение между одними и теми же параллельными, а также равенство треугольников или параллелограммов, ясно, что мы можем обращать

их многими способами, всегда соединяя два и оставляя одно. Мы можем предположить, что основания совпадают или равны и что треугольники и параллелограммы находятся между одними параллельными, и это даёт четыре теоремы; либо можем взять фигуры равными и основания совпадающими или равными, и это даёт ещё четыре – из которых автор *Начал* проходит мимо двух, относящихся к параллелограммам, и доказывает две о треугольниках; либо можем взять фигуры равными и между одними и теми же параллельными, и доказать оставшееся, что они находятся или на одном основании, или на равных основаниях, и это даёт ещё четыре теоремы. Эти теоремы автор *Начал* опускает целиком. И доказательство для них одинаково, с учётом того, что две из четырёх вообще не являются истинными. Ведь равные параллелограммы или треугольники между одними и теми же параллельными вовсе не обязательно находятся на одном основании. Но в целом то, что следует из посылок, истинно, а именно, что они либо находятся на одном основании, либо имеют равные основания, хотя каждое из этих следствий порознь не вытекает из принятых посылок.

Так что из десяти теорем наш геометр включил в рассмотрение шесть и исключил четыре, чтобы не повторяться, поскольку доказательство тут то же самое. Для примера мы докажем, [411] что если равные треугольники находятся между одними и теми же параллельными, то у их основания совпадают или равны между собой. Допустим, что это не так: пусть такие треугольники ΑΒΓ и ΔΕΖ имеют неравные основания ΒΓ и ΕΖ, и пусть ΒΓ больше. Вычтем из него ΒΘ, равную ΕΖ, и соединим ΑΘ. Поскольку треугольники ΑΒΘ и ΔΕΖ находятся на равных основаниях ΒΘ и ΕΖ и между одними и теми же параллельными, они равны. Но ΑΒΓ и ΔΕΖ равны по предположению. Тем самым равны ΑΒΓ и ΑΒΘ, что невозможно. Следо-

вательно, основания треугольников АВГ и ΔEZ не могут быть неравными.



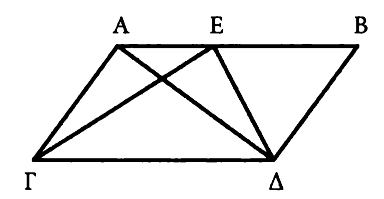
Этот же способ годится и для параллелограммов. И поскольку метод доказательства здесь такой же, и итоговая невозможность, что часть равна целому, та же самая, автор *Начал* эту теорему естественно пропустил. Так что мы сказали, что здесь по необходимости имеется десять теорем, и показали какие пропущены и по какой причине. Теперь перейдём к следующим теоремам.

[412] XLI. Если параллелограмм находится на одном основании с треугольником и между одними параллельным, то параллелограмм в два раза больше треугольника.

Это также местная теорема. В её составе соединены треугольники и параллелограммы под одной высотой. Раньше мы рассматривали по отдельности параллелограммы и треугольники, а теперь мы берём их вместе и смотрим, в каком отношении друг к другу они находятся. Уже показано, что все треугольники на одном основании и между одними и теми же параллельными состоят между собой в отношении равенства, и все параллелограммы тоже. В этой же теореме доказывается самое первое из неравных отношений, двукратное. А именно, доказывается, что параллелограмм в два раза больше треугольника на одном с ним основании и под одной высотой. Доказывая эту теорему, автор *Начал* помещает вершину треугольника снаружи

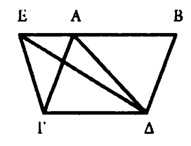
параллелограмма[47]; а мы докажем её, взяв вершину на стороне параллелограмма, параллельной их общему основанию. Поскольку основания общие, по необходимости имеются два случая для этой теоремы, когда вершина треугольника лежит внутри или снаружи параллелограмма[48].

[413] Пусть ΑΒΓΔ – параллелограмм и ΕΓΔ – треугольник, и Ε лежит между Α и Β. Поскольку параллелограмм в два раза больше ΑΓΔ, и ΑΓΔ равен треугольнику ΕΓΔ, то параллелограмм в два раза больше треугольника ΕΓΔ.



И вот ясно показано, что параллелограмм в два раза больше треугольника с тем же основанием. А если основания равны, мы покажем то же самое, проведя диагональ параллелограмма. Ведь если два треугольника равны, двукратный к одному будет двукратным и к другому. Но треугольники равны, потому что они находятся на равных основаниях и под одной и той же высотой. Наш геометр естественно пропускает этот случай, ведь

[47] Доказательство Евклида ничем не отличается от того доказательства, которое приводит Прокл, только у Евклида точка Ε лежит на продолжении ΑΒ, а у Прокла – внутри ΑΒ.



[48] Третий случай, когда вершина треугольника совпадает с вершиной параллелограмма, уже рассмотрен в предложении I.36.

доказательство здесь то же самое. И будут ли основания иметь общую часть, или соприкасаться в одной точке, или они будут отделены друг от друга, – во всех этих случаях доказательство будет одним и тем же.

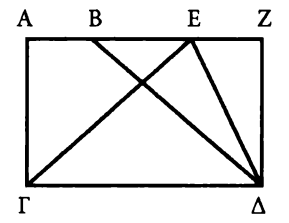
И обращения этой теоремы доказываются одинаково. Одно из них таково: если параллелограмм в два раза больше треугольника, и они лежат на одном основании или на равных основаниях по одну сторону, то они лежат и между [414] одними и теми же параллельными. Ведь если это не так, то целое равно части, по тому же рассуждению. По необходимости вершина треугольника будет падать или внутри параллельных, или вне. И где бы она ни была, если провести через вершину прямую, параллельную основанию, получится так же самая невозможность.

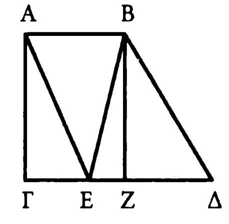
Другое обращение таково: если параллелограмм в два раза больше треугольника, и они находятся между одними и теми же параллельными, то они лежат на одном основании или на равных основаниях. Ведь если на неравных, мы возьмём равные, и докажем, что всё целое равно части. Все эти теоремы завершаются общей невозможностью. Поэтому автор *Начал* оставил нам многообразие случаев, а сам занялся теорией простейших и изначальных случаев.

После того, как всё это упомянуто, мы ради упражнения возьмём не параллелограмм, а трапецию, у которой только две стороны параллельны, так что треугольник лежит на одном с ней основании и между одними и теми же параллельными, и посмотрим, какое отношение она имеет к треугольнику. Ясно, что оно не будет двукратным: ведь тогда это был бы параллелограмм, а не четырёхсторонник. Я утверждаю, что оно будет больше или меньше двукратного. Из двух параллельных одна больше, а другая меньше: ведь если бы они были равны, то и соединяющие их линии были бы параллельными между собой. И если основанием треугольника служит бóльшая из них, то

[415] отношение четырёхсторонника к треугольнику к будет меньше двукратного, а если меньшая – больше.

Пусть АВГΔ – четырёхсторонник, в котором АВ меньше ГΔ, и АВ продолжена в бесконечность, и треугольник ЕГΔ имеет общее с четырёхсторонником основание ГΔ, и через Δ параллельно АГ проведена прямая ΔZ. Тогда параллелограмм АГΔZ будет двукратным к треугольнику ЕГΔ, так что четырёхсторонник АВГΔ – меньше чем двукратным. И опять, пусть треугольник имеет основание АВ, и ВZ параллельна АГ. Тогда АВГZ будет двукратным к треугольнику, так что четырёхсторонник АВГΔ – более чем двукратным.

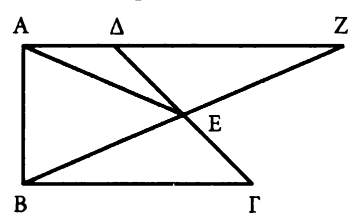




Этим мы также доказали, что если в четырёхстороннике, у которого только две противоположные стороны параллельны, разделить пополам одну из параллельных и соединить её середину с концами другой прямой, то четырёхсторонник будет или более, или менее чем двукратным в сравнении с получившимся треугольником. Но если разделить пополам одну из боковых стяжек и соединить её середину с концами другой стягивающей прямой, то четырёхсторонник всегда будет двукратным в сравнении с получившимся треугольником. Докажем это.

[416] Пусть АВГΔ – четырёхугольник, в котором АΔ параллельна ГВ, и ΔГ разделена пополам в Е, и соединены ЕА и ЕВ. Продолжим ВЕ до встречи с АΔ в Z. Поскольку углы при Е равны как вертикальные, и углы ZΔЕ и ВГЕ тоже равны, то и треугольник ΔЕZ будет равен треугольнику ВГЕ, и ВЕ будет равна ЕZ. Добавим к каждому из этих треугольников треуголь-

ник AΔE. Тем самым весь треугольник AEZ равен двум треугольникам AΔE, BГE. Но треугольник AEZ равен треугольнику AEB, потому что их основания BE и EZ равны, и они находятся между одними и теми же параллельными[49]. Поэтому треугольник AEB равен треугольникам AΔE, *** [50] [BГE. Тем самым четырёхсторонник ABГΔ является двукратным в сравнении с треугольником AEB, что и требовалось доказать.



Таким же способом мы можем доказать, что в случае, когда середина AB соединена с концами ГΔ, четырёхугольник будет двукратным в сравнении с полученным треугольником. Тем самым, если из середины одной из боковых стяжек проведены прямые к концам другой, четырёхугольник будет двукратным в сравнении с полученным треугольником. Перейдём теперь к следующим предложениям.]

[XLII. В угле, равном данному прямолинейному углу, построить параллелограмм, равный данному треугольнику.] [51]

[49] Параллельная через вершину A к основанию BZ здесь не проведена.

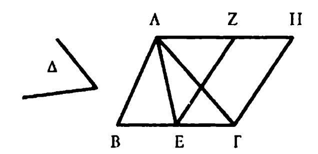
[50] Здесь начинается большая лакуна в тексте, затрагивающая всё предложение I.42 и часть предложения I.43; впрочем, конец доказательства предложения I.41 восстанавливается без каких-либо затруднений. Такое восстановленное доказательство имеется в одной из сохранившихся рукописей; мы приводим его по этому тексту.

[51] Евклид выполняет это построение так. Пусть дан треугольник ABГ и угол Δ. Разделим BГ пополам в E, соединим AE и построим угол ГEZ, равный Δ. Далее проведём AH параллельно BГ и ГH парал-

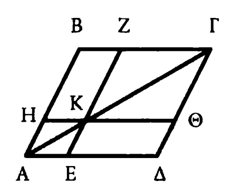
[XLIII. В любом параллелограмме дополнительные параллелограммы к диаметру равны между собой.] [52]

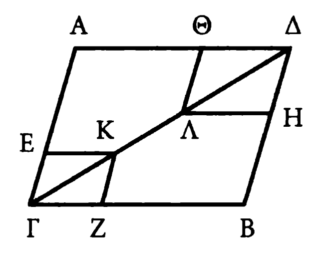
*** и параллелограммы не соприкасаются [417] в точке. Поскольку дополнения при этом не будут четырёхсторонними, нам надо рассмотреть также и этот случай, чтобы увидеть, что всё остаётся таким же. Пусть в параллелограмме АВ на одной с ним диагонали находятся параллелограммы ГК и ΔΛ, так что между ними расположена часть диагонали КΛ. И ты опять скажешь то же самое. Треугольник АГΔ равен ВГΔ, ЕГК равен КГΛ, ΔНΛ равен ΔΘΛ. Так что и оставшийся пятисторонник АНΛКЕ равен пятистороннику ZКΛΘ. Но это и есть дополнения.

лельно EZ до встречи в H. Параллелограмм EZГH – искомый.

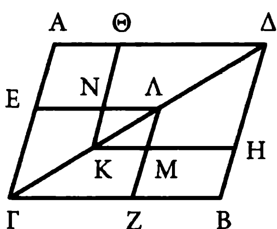


[52] Евклид доказывает эту теорему так. Пусть дан параллелограмм ABГΔ, и через произвольную точку K на его диагонали AГ проведены прямые EZ, HΘ параллельно сторонам. Требуется доказать, что «дополнительные» параллелограммы BHKZ и KEΔΘ равны между собой. Треугольники в парах ABГ и ГΔA, KZГ и ГΘK, AHK и KEA равны между собой как половинки параллелограммов. Но если от равных отнять равные, то и остатки будут равны.



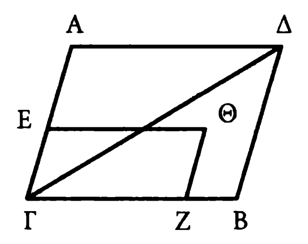


А если параллелограммы не встречаются в точке и не разделены, но перекрываются, доказательство остаётся тем же. Пусть имеется параллелограмм ΑΒ с диагональю ΓΔ, и в нём находятся параллелограммы ΕΓΖΛ и ΔΗΚΘ, пересекающиеся [418] друг с другом. Я утверждаю, что дополнения ΖΗ и ΕΘ равны. Ведь целый треугольник ΔΗΚ равен целому треугольнику ΔΘΚ, и часть ΚΛΜ равна части ΚΛΝ (поскольку ΛΚ – параллелограмм), а потому и оставшиеся трапеции ΔΛΝΘ и ΔΛΜΗ равны между собой. Но и треугольник ΑΔΓ равен треугольнику ΒΔΓ, и часть ΖΓΛ равна части ΕΓΛ в параллелограмме ΕΖ, и трапеция ΔΗΜΛ равна трапеции ΔΘΝΛ, так что и оставшиеся четырёхсторонники ΗΖ и ΕΘ равны между собой. Теперь теорема доказана для всех трёх случаев. Всего имеются три случая, и не меньше. Ведь параллелограммы на одной диагонали могут пересекаться, либо касаться в точке, либо быть разделёнными частью диагонали.



Имя «дополнительные» взято автором *Начал* из сути дела, поскольку они дополняют два параллелограмма до целого. Поэтому он не даёт им особого определения. Ведь это потребова-

ло бы полного объяснения, чтобы мы знали, что такое параллелограмм, и что такое параллелограммы на диагонали целого. Ведь только после это объяснение того, что такое «дополнительные», станет понятным. На одной диагонали находятся те параллелограммы, для которых их диагональ является частью диагонали целого; а если нет, то нет. Ведь если диагональ целого [419] пересекает сторону внутреннего параллелограмма, этот параллелограмм не находится «на одной диагонали». К примеру, пусть в параллелограмме AB диагональ ΓΔ пересекает сторону EΘ параллелограмма ΓE. Тогда EΓ не находится на одной диагонали с ΓΔ.



XLIV. К данной прямой в угле, равном данному прямолинейному углу, приложить параллелограмм, равный данному треугольнику.

Евдем и его школа говорят, что все эти вещи – приложение (παραβολή), переброс (ὑπερβολή) и недоброс (ἔλλειψις) – являются древними открытиями музы пифагорейцев. Позднейшие геометры взяли эти имена и перенесли их на так называемые конические линии, назвав их параболой, гиперболой и эллипсом, тогда как те древние и божественные мужи видели значение этих имён в построении плоских площадей на ограниченных прямых. [420] Когда данная площадь, построенная на данной прямой, совпадает со всей прямой, тогда, по их словам, эта площадь «приложена» (παραβάλλειν) к прямой; когда дли-

на площади получается больше самой прямой, площадь «переброшена» (ὑπερβάλλειν); а когда возникает недостаток, так что после построения площади прямая выступает наружу, площадь «недоброшена» (ἐλλείπειν). Евклид в шестой книге говорит о гиперболе и эллипсе в этом смысле [53], здесь же он говорит только о приложении данного треугольника к данной прямой, чтобы мы могли не только построить параллелограмм, равный данному треугольнику, но ещё и чтобы он ещё и был приложен к данной ограниченной прямой. К примеру, пусть дан треугольник с площадью в двенадцать футов, и проведена прямая длиной в четыре фута. Мы приложим треугольник к прямой, если, взяв целую длину в четыре фута, мы найдём, скольким футам должна равняться ширина, чтобы получился параллелограмм, равный треугольнику. Допустим, что мы нашли, что ширина составляет три фута. Умножив длину на ширину, найдём площадь, при условии, что взят прямой угол. Вот в чём состоит приложение, восходящее к пифагорейцам.

В этой задаче даны три вещи: прямая, к которой делается приложение, которая вся будет стороной площади, треугольник, которому будет равна [421] приложенная площадь, и угол, которому будет равен угол площади. Ясно, что когда угол будет прямым, приложенная площадь будет квадратом или прямоугольником, а когда он будет острым или тупым – площадь будет ромбом или ромбоидом. Прямая очевидно должна быть ограниченной. Ведь для бесконечной прямой это невозможно. И, говоря о приложении площади к данной прямой, он по необходимости считает прямую ограниченной.

Для решения этой задачи он пользуется построением параллелограмма, равного данному треугольнику. Приложение и построение – это, как мы уже сказали, не одно и то же. Постро-

[53] Предложения VI.27–29.

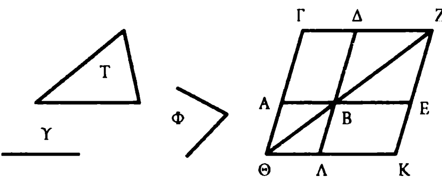
ение устанавливает целое – и площадь, и стороны; тогда как приложение исходит из одной данной стороны и устанавливает площадь на ней, не короче и не длиннее, но так, чтобы одна эта сторона охватывала площадь[54].

Вы можете спросить, почему он устанавливал равенство треугольника треугольнику в теоремах, а равенство параллелограмма треугольнику – в задаче? Потому, отвечаем мы, что равенство однородных вещей естественно и устанавливается одним рассмотрением; а равенство разнородных вещей требует построения и ухищрения, поскольку его трудно обнаружить.

[422] XLV. В данном прямолинейном угле построить параллелограмм, равный данной прямолинейной фигуре.

Эта задача является более общей, нежели те две, в которых он рассматривал построение и приложение параллелограмма, равного данному треугольнику. Дан ли треугольник, или четырёхсторонник в целом, или другой многосторонник, в этой задаче строится равный ему параллелограмм. Как сказа-

[54] Евклид решает эту задачу так. Сначала в данном угле Φ строится параллелограмм ΑΒΓΔ, равный данному треугольнику Τ (предложение I.42). Затем сторона ΑΒ удлиняется на прямую ΒΕ, равную данной прямой Υ. Далее строится параллелограмм ΒΔΕΖ, и его диагональ ΒΖ и сторона ΑΓ продлеваются до пересечения в Θ. Затем строится параллелограмм ΑΘΕΚ и параллелограмм ΒΛΕΚ. Этот параллелограмм ΒΛΕΚ равен ΑΒΓΔ по предложению I.43, и он приложен к прямой ΒΕ, равной Υ.



но ранее[55], всякая прямолинейная фигура разлагается на треугольники, и мы указали метод, которым может быть найдено их количество. Так что разделив данную прямолинейную фигуру на треугольники, построив параллелограмм, равный одному из них, а затем приложив оставшиеся параллелограммы по очереди к той прямой, к которой сделано первое приложение, мы составим параллелограмм, равный прямолинейной фигуре, составленной из всех треугольников, и тем самым завершим построение. К примеру, взяв десятистороннюю прямолинейную фигуру, мы разложим её на восемь треугольников, построим параллелограмм, равный одному из них, затем семь раз приложим оставшиеся, и так найдём искомое.

Я полагаю, что древние занялись этой задачей, когда отыскивали квадратуру круга. Ведь если для каждой прямолинейной фигуры [423] можно найти равный ей параллелограмм, остаётся выяснить, можно ли доказать, что прямолинейная фигура равна круговой. И Архимед доказал[56], что всякий круг равен прямоугольному треугольнику, вертикальный катет которого равен радиусу, а основание – периметру круга. Но об этом всё; пойдём дальше.

XLVI. На данной прямой начертить квадрат.

Эта задача нужна нашему автору в частности для строгого вывода следующей теоремы, но похоже, что он хочет также передать нам построение двух наилучших прямолинейных фигур: равностороннего треугольника и квадрата[57]. Ясно, что они

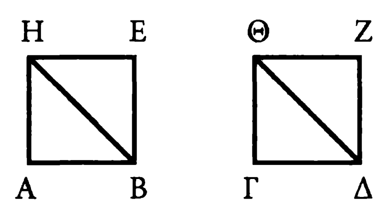
[55] 381.23.

[56] Архимед, *Измерение круга*, I.

[57] Евклид строит квадрат так. К данной прямой AB восстанавливается перпендикуляр AΔ, на котором отмечается точка Δ так, чтобы AΔ была равна AB. К построенным прямым проводятся перпендикуляры BΓ и

нужны ему для составления космических фигур, и особенно для четырёх, в возникновении и разложении которых участвуют эти прямолинейные фигуры. Ведь икосаэдр, октаэдр и пирамида составляются из равносторонних треугольников, а куб из квадратов [58]. Я думаю, что поэтому он о треугольниках говорит «построить», а о квадратах – «начертить». Эти имена он находит подходящими для этих фигур. Ведь построение треугольника требует собирания многого, а квадрат чертится из одной стороны. Мы получаем квадрат, умножая число данной стороны на себя, [424] но для треугольника это не так: мы проводим линии от концов прямой, соединяя их в равносторонний треугольник, и чертим круги, чтобы найти точку, из которой надо проводить прямые к концам данной прямой. Это ясно. Но нам следует знать, что когда прямые равны, то равны и начерченные на них квадраты.

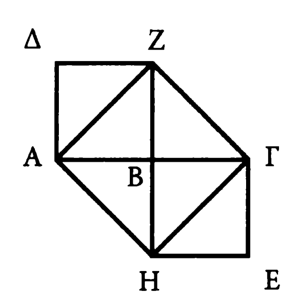
Пусть AB и ΓΔ равны, и на AB начерчен квадрат ABEH, а на ΓΔ – квадрат ΓΔZΘ, и соединены HB и ΘΔ. Поскольку равны AB и ΓΔ, и также AH и ΓΘ, и они охватывают равные углы, тем самым равны HB и ΘΔ, и равны треугольники ABH и ΓΔΘ, и их удвоенные. Также равны AE и ΓZ.



ΔΓ, сходящиеся в точке Γ. Противоположные стороны параллельны по предложению I.28; все стороны и углы равны по предложению I.34.

[58] В *Тимее* эти четыре тела названы элементами воды, воздуха, огня и земли.

И обратное тоже истинно. Ведь если квадраты равны, но и прямые, на которых они построены, тоже равны. Пусть AZ и ГН – равные квадраты, и пусть AB и BГ лежат на одной прямой. Поскольку углы квадратов – прямые, ZB и BH тоже лежат [425] на одной прямой. Соединим ZГ и AH. Поскольку квадрат AZ равен квадрату ГН, то и треугольник AZB равен треугольнику ГВН [59]. Прибавим общий треугольник BГZ. Целый треугольник AГZ равен треугольнику ГZH [60], так что AH параллельна ZГ [61]. И опять, поскольку углы AZH и ГНВ составляют половину прямого угла, AZ параллельна ГН. Так что AZ равна ГН, как противоположные стороны параллелограмма. И поскольку треугольники ABZ и BГН имеют равные накрестлежащие углы, AZ и ГН параллельны, и AZ и ГН – это одна сторона, AB будет равна BГ, и BZ будет равна BH. Тем самым доказано, что стороны, на которых начерчены квадраты, будут равны, если сами квадраты равны.



[59] Эти треугольники равны по площади; ведь равенство сторон нам неизвестно, ибо мы его собираемся доказывать.

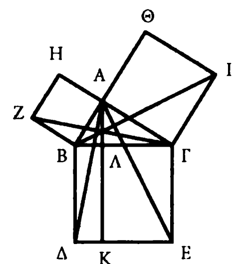
[60] Треугольники равны по площади; то, что они равны наложением, ещё не установлено.

[61] Этот вывод неправомочен, потому что равенство углов не установлено.

[426] XLVII. В прямоугольном треугольнике квадрат на стороне, стягивающей прямой угол, равен квадратам на сторонах, прилежащих к прямому углу.

Если мы захотим послушать тех, кто любит записывать древности, мы узнаем, что они приписывают эту теорему Пифагору и сообщают, что он принёс в жертву быка за своё открытие. Удивляясь тому, кто впервые постиг истину этой теоремы, я ещё больше восхищаюсь автором *Начал*, и не только за ясное доказательство, которое он предоставил [62], но ещё и потому, что в шестой книге он доказал эту теорему в более общем виде с помощью неопровержимых доводов. Ведь в этой книге он доказал в общем виде, что фигура, построенная на стороне, стягивающей прямой угол треугольника, равна подобным и подобно начерченным фигурам, построенным на сторонах, прилежащих к прямому углу. Конечно, всякий квадрат подобен всякому другому

[62] Доказательство Евклида основано на следующем чертеже. Здесь треугольник ZBΓ равен половине квадрата ABHZ, поскольку они имеют общее основание и высоту; треугольник ABΔ равен треугольнику ZBΓ по двум сторонам и углу между ними; прямоугольник BΔΛK равен удвоенному треугольнику ABΔ, поскольку они имеют общее основание и высоту. Тем самым прямоугольник BΔΛK равен квадрату ABHZ. Аналогично доказывается, что прямоугольник ΛKΓE равен квадрату ΘAIΓ. Тем самым квадраты ABHZ и ΘAIΓ вместе равны квадрату BΓΔE.



квадрату, но не все подобные прямолинейные фигуры являются квадратами, поскольку подобными бывают также треугольники и другие многоугольники. И потому доказательство того утверждения, что фигура, построенная на стороне, стягивающей прямой угол прямоугольного треугольника, будь она квадратной или какой-нибудь ещё, равна подобным и подобно начерченным [427] фигурам, построенным на сторонах, прилежащих к прямому углу, является более общим и научным, нежели то, в котором показывается, что квадрат равен квадратам. К тому же здесь показана и причина этого общего утверждения: а именно, равенство фигуры, построенной на гипотенузе, вместе взятым подобным и подобно начерченным фигурам на катетах вызвано прямизной угла, тогда как тупой угол доставляет превосходство, а острый – недостаток. Как он доказал эту теорему в шестой книге, там и станет ясно; здесь же мы рассмотрим только предварительную истину. Заметим лишь, что он не даёт здесь общего доказательства, поскольку он не объяснил ещё, что представляют собой прямолинейные подобные фигуры, и не рассмотрел общих доказательств о пропорциях. Ведь многое, доказанное здесь для частных случаев, с помощью этого метода доказывается в более общем виде. Автор *Начал* отыскивает здесь своё доказательство с помощью общей теории параллелограммов.

Имеются два вида прямоугольных треугольников, равнобедренные и разносторонние. В равнобедренных треугольниках вы не сможете найти чисел, выражающих стороны. Ведь тогда бы квадратное число было равно удвоенному квадратному, если только не говорить о приближениях; ведь квадрату 7 недостаёт 1 до удвоенного квадрата 5. Но в неравносторонних треугольниках мы можем найти такие числа, которые показывают нам, что квадрат на гипотенузе прямого угла равен квадратам на катетах. [428] Таков треугольник в *Государстве*[63], в котором

[63] Платон, *Государство* 546c.

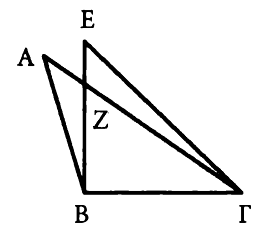
к прямому углу прилежат стороны 3 и 4, а противолежит 5, так что квадрат 5 равен квадратам этих сторон. Ведь он равен 25, а квадрат 3 равен 9 и квадрат 4 равен 16. Так что сказанное ясно для чисел.

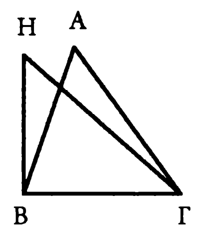
Известны определённые методы нахождения таких треугольников, один из которых приписывают Платону, другой – Пифагору. Метод Пифагора исходит из нечётных чисел. Этот метод принимает данное нечётное число за меньший из катетов, и, возведя его в квадрат и вычтя единицу, принимает половину остатка за больший катет. Прибавив к последнему единицу, получаем гипотенузу. К примеру, возьмём три, возведём в квадрат, вычтем единицу из 9, возьмём половину от 8, а именно 4, прибавим единицу и получим 5. Найден прямоугольный треугольник со сторонами три, четыре, пять. Метод Платона исходит из чётных чисел. Данное чётное число берётся как один из катетов, делится пополам, и половина возводится в квадрат; прибавлением единицы к квадрату [429] получаем гипотенузу, а вычитанием единицы из квадрата получаем другой катет. К примеру, возьмём 4, половину от него, то есть 2, возведём в квадрат и получим 4. Вычитая единицу, получим 3, а прибавляя единицу, получим 5. И вот построен тот же самый треугольник, что и предыдущим методом. Ведь квадрат этого числа равен квадрату 3 и квадрату 4, сложенным вместе.

Всё это выходит за рамки рассматриваемого вопроса. Но поскольку доказательство автора *Начал* является ясным, я думаю, что мне здесь не следует быть многоречивым, но нужно удовлетвориться написанным. Ведь те, кто делали добавления к этому, как последователи Герона и Паппа, по необходимости добавляли то, что доказывается в шестой книге, хотя оно и не относится к делу. Так что мы сейчас последуем дальше.

XLVIII. Если в треугольнике квадрат на одной стороне равен квадратам на двух оставшихся сторонах, то угол между оставшимися сторонами треугольника будет прямым.

Эта теорема обратна предыдущей как целое к целому. Ведь если треугольник прямоугольный, то квадрат гипотенузы равен квадратам оставшихся сторон; [430] и если он равен квадратам оставшихся сторон, то треугольник прямоугольный, и прямой угол охвачен оставшимися сторонами. Доказательство автора *Начал* ясно. Пусть имеется треугольник АВГ, и квадрат на АГ равен квадратам на АВ, ВГ. Восставим из точки В перпендикуляр к ВГ. Если кто-то скажет, что автор *Начал* провёл перпендикуляр по другую сторону, а не по эту, мы ответим, что это рассуждение – о невозможном, ибо он не может падать ни внутри треугольника, ни снаружи, но только по АВ. Но допустим, что это возможно, и пусть он падает по ВЕ. Тогда, поскольку угол ЕВГ – прямой, угол ГZВ будет острым, а смежный с ним угол AZB – тупым. Тем самым АВ больше BZ. Поскольку положено, что АВ равна ВЕ, соединим ЕГ. Поскольку угол ЕВГ – прямой, тем самым квадрат на ЕГ равен квадратам на ЕВ, ВГ. Но ЕВ равна ВА, и квадрат на ЕГ равен квадратам на АВ, ВГ. Стало быть, квадрат на ЕГ равен квадрату на АГ, и тем самым ЕГ равна АГ. Но ЕВ равна АВ. Получается, что построенные на ВГ прямые ВЕ, ЕГ соответственно равны [431] прямым ВА, АГ, что невозможно.





Пусть теперь перпендикуляр не падает внутри. Но он не может падать и снаружи, по другую сторону от АВ. Допустим, что это возможно, и пусть он падает по ВН, и пусть ВН равна АВ. Соединим ГН. Поскольку угол НВГ – прямой, тем самым квадрат на НГ равен квадратам на ВН, ВГ. Но ВН равна ВА, поэтому квадрат на НГ равен квадратам на АВ, ВГ. Однако и квадрат на АГ равен квадратам на АВ, ВГ. Поэтому НГ равна АГ. Но на той же прямой ВГ также и НВ равна ВА, что невозможно. Так что перпендикуляр, восставленный к ВГ в точке В, не может падать ни внутри, ни снаружи. Поэтому он падает по АВ, и треугольник АВГ – прямоугольный. И возражение разрешено.

Этой теоремой автор *Начал* завершает свою первую книгу. Он представил здесь много видов обращения: целое к целому, целое к части, часть к целому. Он научил нас решению многих задач: как делить линии и углы, как размещать, строить, прикладывать. Он коснулся так называемых парадоксальных мест в математике и познакомил нас с местными теоремами; [432] он обсудил общие и частные теоремы; он показал разницу между неопределёнными и определёнными задачами; и мы, следуя ему, всё это отчётливо изложили. Целую книгу он посвятил обзору теории простейших прямолинейных фигур, отыскивая их построение и исследуя присущие им свойства.

Что касается нас, если мы сумеем так же пройти и через остальные книги, нам надо будет возблагодарить богов; но если нас отвлекут другие занятия, мы предложим любителям этой теории последовательно разобрать остальные книги таким же путём, излагая все сложности и разделяя найденное, поскольку имеющиеся сейчас комментарии полны неясностей и ничего не дают для изложения причин, диалектических различений и философской теории.

УНИВЕРСИТЕТ ДМИТРИЯ ПОЖАРСКОГО

КНИГИ, ПЛАНИРУЮЩИЕСЯ К ИЗДАНИЮ В 2012 г.

(книги, уже готовые к изданию или находящиеся на стадии редактуры и верстки):

ИСТОРИЧЕСКИЕ ИСТОЧНИКИ:

1. Каштанов С.М.: «Исследование о молдавской грамоте XV века»
2. Мереминский С.Г.: «История Англов. Генрих Хантингдонский»
3. Баранова С.И.: Керамическая «летопись» колокольни храма Святых Адриана и Наталии (Святых Апостолов Петра и Павла) в Москве
4. «Каталог нательных крестов, обнаруженных в ходе археологических исследований в Москве в 1989—2009 гг.». Под руководством Главного археолога города Москвы, академика РААСН и ААН, профессора Александра Григорьевича Векслера
5. Каталог «Скандинавские древности на территории Руси. VIII—XIII вв.». Руководители проекта: д.и.н. Мельникова Е.А., д.и.н. Петрухин В.Я., к.и.н. Пушкина Т.А., д-р И. Янссон
6. Немецкие хроники X – XI вв. и Адам Бременский. Деяния архиепископов Гамбургской церкви
7. Марей А.В.: «Вестготская правда»
8. Джаксон Т.Н.: «Исландские королевские саги о Восточной Европе»
9. Виноградов А.Ю.: «Деяния Андрея и Матфия в городе людоедов»

ИСТОРИЯ ДРЕВНЕЙ И СРЕДНЕВЕКОВОЙ РУСИ:

10. Столярова Л.В.: «Детектив 16-го века: расследование причин смерти царевича Дмитрия на базе сохранившихся исторических источников»
11. Ткаченко В.А. «Некрополь Свято-Троицкой Сергиевой лавры конца XIV — начала XXIв.»
12. Евсеева Л.М.: «Аналойные иконы в Византии и Древней Руси. Образ и литургия»
13. Монография: «Древняя Русь в свете зарубежных источников». Под редакцией Т.Н. Джаксон, И.Г. Коноваловой, Е.А. Мельниковой, А.В. Подосинова, Г.В. Глазыриной. Данная монография издается в комплекте с пятитомником одноименной хрестоматии: «Античные источники», «Византийские источники», «Древнескандинавские источники», «Восточные источники», «Западноевропейские источники».

ЭТНОГРАФИЯ, АРХЕОЛОГИЯ И ФОЛЬКЛОРИСТИКА:

14. Иванова Л.И.: «Персонажи карельской мифологической прозы»
15. Лобанова Н.В., В.Ф. Филатова: «Археологические памятники в районе Онежских петроглифов»
16. Лобанова Н.В.: «Петроглифы Онежского озера»
17. Кривощапова Ю.А.: «Русская народная энтомология: этнолингвистический аспект»
18. Сборник статей: «Именослов. История языка. История культуры» (Отв. ред. Успенский Ф.Б.)

ЕВРОПЕЙСКАЯ МЕДИЕВИСТИКА:

19. Мереминский С.Г.: «Формирование традиции: английское историописание вторая половина 11 – первая половина 12 веков»
20. Гимон Т.В.: «Историописание раннесредневековой Англии и Древней Руси: Сравнительное исследование»
21. Перевод книги: «Stender-Petersen A. Die Varagersage als Quelle der altrussischen Chronik. Aarhus, 1934» . Редактура и подготовка вступительной статьи Е.А. Мельникова
22. Перевод книги: «Goetz L.K. Deutsch-russische Handelsgeschichte des Mittelalters. Lubeck, 1922.» Редактура и подготовка вступительной статьи Е.А. Мельникова
23. Виноградов П.Г.: «Средневековое поместье в Англии». Подготовка книги к переизданию, комментарии и вступительная статья Гладков А.К.
24. Виноградов П.Г.: «Римское право в средневековой Европе». Подготовка книги к переизданию, комментарии и вступительная статья Гладков А.К.
25. Виноградов П.Г.: «Исследования по социальной истории Англии в Средние века». Подготовка книги к переизданию, комментарии и вступительная статья Гладков А.К.
26. Виноградов П.Г.: «Исследование по истории феодального строя Лангобардской Италии». Подготовка книги к переизданию, комментарии и вступительная статья Гладков А.К.

ИСТОРИЯ 20-ГО ВЕКА. «ХОЛОДНАЯ ВОЙНА» И ДРУГИЕ ВОЙНЫ:

27. Платошкин Н.Н.: «Интервенция США в Доминиканской республике 1965 года»

28. Платошкин Н.Н.: «История Сандинистской революции в Никарагуа» революции»
29. «Многосторонняя дипломатия в биполярной системе международных отношений» (отв. ред. Н.И. Егорова).
30. «Хмурые будни холодной войны. Ее солдаты, прорабы и невольные участники» (Отв. ред. Степанов А.С.)
31. Куликов В.П.: «История Русского Военного Воздушного Флота 1885—1917»

АНТИЧНОСТЬ И ВИЗАНТИНИСТИКА:

32. Домановский А.Н.: «Государственный контроль и регулирование торговли в Византии IV—IX вв.»
33. Сорочан С.Б.: «Византийский Херсон (вторая половина VI — первая половина X вв.). Очерки истории и культуры»
34. Лидов А.М.: «Росписи Ахталы»
35. «Латинские Панегирики — XII — PANEGYRICI LATINI». Перевод с латинского языка, статья, комментарии и приложение Шабага И.Ю.
36. Жмудь Л.Я.: «Пифагор и ранние пифагорейцы»

ГЕОПОЛИТИКА И ГЕОЭКОНОМИКА:

37. Рахаев Д.Я.: «Политика России на Северном Кавказе в первой четверти XVIII века»

УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ:

38. Рязановский А.Р.: Пособие по математике для поступающих в «математические вузы»: «500 способов и методов решения задач по математике»

ЕГИПТОЛОГИЯ:

39. Лаврентьева Н.В.»Мир ушедших. Дуат: Образ иного мира в искусстве Египта (Древнее и Среднее царства)

ARISTEAS. Philologia classica et historia antiqua.
Supplementa. Volumen III.

Научное издание

Прокл Диадох

КОММЕНТАРИЙ К ПЕРВОЙ
КНИГЕ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА

Перевод: *Андрей Иванович Щетников*

Печатается по решению
Ученого совета Университета Дмитрия Пожарского

Дизайн и верстка: *А.В. Белоусова*

Подписано в печать 15.01.13 Формат 140х205
Бумага офсетная, 80 гр.. Печать офсетная.
Тираж 500 экз. Заказ 2783.

Русский Фонд Содействия Образованию и Науке
119435, Москва, ул. Малая Пироговская, д. 13, стр. 1
www.s-and-e.ru

ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6